

Geordnete Steinersche Tripelsysteme

von

Sigrid Walter
aus Coburg

Diss. Erlangen 1983

1984 № 36



Geordnete Steinersche Tripelsysteme

Den Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen - Nürnberg
zur
Erlangung des Doktorgrades

vorgelegt von
Sigrid Walter
aus Coburg

Als Dissertation genehmigt von den Naturwissen-
schaftlichen Fakultäten der Universität
Erlangen-Nürnberg

Tag der mündlichen Prüfung: 21.11.1983

Vorsitzender der
Promotionskommission: Professor Dr. K. Jacobs

Erstberichterstatter: Professor Dr. P. Plaumann

Zweitberichterstatter: Professor Dr. K. Strambach

EINLEITUNG

Die wohl eleganteste Darstellung der Cayley'schen Oktavenalgebra O geht auf H. Freudenthal [25] zurück:

O ist ein achtdimensionaler linearer Raum mit dem reellen Zahlkörper $\mathbb{R}$ als Koeffizientenkörper mit einem positiv definiten inneren Produkt (x, y) , also auch einer Vektorlänge $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

In O ist eine distributive Multiplikation $x \cdot y$ definiert mit einem Einselement e_0 , die für alle $x, y \in O$: $|xy| = |x||y|$ erfüllt.

Man kann eine Orthonormalbasis $\{e_0, e_1, \dots, e_7\}$ von O finden, für die gilt:

- (i) $e_i e_j = \pm e_{k_{i,j}}$ für alle i, j
- (ii) $e_i^2 = -e_0$ für $i > 0$
- (iii) $e_i e_j + e_j e_i = 0$ für $i \neq j; i, j > 0$
- (iv) $e_i (e_j e_k) = -e_j (e_i e_k) = e_j (e_k e_i)$ für $i \neq j \neq k \neq i; i, j, k > 0$

Nennt man die Menge der e_i ($i > 0$) nun C , die Elemente von C Punkte und die zyklisch geordneten Tripel $[e_i, e_j, e_k]$ orientierte Geraden $(e_i (e_j e_k) = -e_0)$, so ist C die ebene projektive Geometrie über dem Primkörper der Charakteristik 2.

Dieses Beispiel läßt sich dem Begriff einer Steiner-Algebra unterordnen, das sind Algebren, die eine Basis $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ besitzen, für die die Bedingungen (i) bis (iv) erfüllt sind und für die die Menge der e_i ($i > 0$) ein geordnetes Steinersches Tripelsystem darstellt.

R. D. Schafer [8] beschreibt die Konstruktion der Cayleyschen Oktavenalgebra $\mathcal{O}$ vom Schiefkörper der Quaternionen aus (vgl. auch H. Braun und H. Koecher [10]):

$\mathcal{O}$ besteht aus allen geordneten Paaren $x =$

$$(b_1, b_2), \quad b_i \in \mathbb{H},$$

Addition und Multiplikation mit Skalaren sind komponentenweise definiert und die Multiplikation ist definiert durch

$$(b_1, b_2)(b_3, b_4) = (b_1 b_3 - b_4 \overline{b_2}, \overline{b_1} b_4 + b_3 b_2),$$

wobei $b_i \in \mathbb{H}$ und $\overline{b_i}$ die Konjugierte von b_i in $\mathbb{H}$ ist.

Diese Konstruktion ordnet sich dem Cayley'schen Erweiterungsprozeß für Steiner-Algebra unter.

Ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n ist ein Paar (A, T) , wobei A eine Menge von n Punkten ist und T eine Menge dreipunktiger Teilmengen von A , genannt Tripel, so daß je zwei Punkte zusammen in genau einem Tripel liegen. Es sei $b = |T|$.

Bereits 1859 wurde von M. Reib [2] gezeigt, daß Steinersche Tripelsysteme der Ordnung n genau dann existieren, wenn $n \equiv 1 \pmod{6}$ oder $n \equiv 3 \pmod{6}$ ist. Wichtige Beispiele solcher Steinerscher Tripelsysteme sind die projektiven Räume $P_n(2)$ über $GF(2)$ und die affinen Räume $A_n(3)$ über $GF(3)$ (dabei werden die Punkte von $P_n(2)$ bzw. $A_n(3)$ als Punkte und die Geraden von $P_n(2)$ bzw. $A_n(3)$ als Tripel des Steinerschen Tripelsystems aufgefaßt).

Zu einem Steinerschen Tripelsystem (A, T) kann man eine Loop $(A^*, \cdot)$ konstruieren, wobei $A^* = A \cup \{1\}$ und die Multiplikation auf A^* definiert ist durch:

$$i) \forall a \in A : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a, a^2 = 1$$

$$ii) \forall a, b \in A : a \cdot b = c \Leftrightarrow (a, b, c) \in T$$

Diese Loops sind totalsymmetrisch, d. h. für alle $a, b \in A^*$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$ und $a \cdot (a \cdot b) = b$.

Sie wurden untersucht z. B. von R. H. Bruck [5], I. Š. O. Aliev [11], [12], J. P. Neporožnev und A. Ja. Petrenjuk [13] sowie N. K. Pukharev [14].

In Kapitel I der Arbeit werden einige bekannte Sätze und Definitionen angeführt, die sich unter anderem in einer Arbeit von Jean Doyen, Xavier Hubaut und Monique Vandensavel [4] finden.

Um zu einer Verallgemeinerung der Cayley'schen Oktaven zu gelangen, werden zyklische Anordnungen der Punkte in den Tripeln eines Steinerschen Tripelsystems untersucht. Ein geordnetes Steinersches Tripelsystem (A, oT) entsteht aus einem Steinerschen Tripelsystem (A, T) , indem man zu jedem Tripel eine zyklische Anordnung der Punkte dieses Tripels unabhängig von den übrigen Tripeln angibt. Zu jedem Steinerschen Tripelsystem kann man so 2^b geordnete Steinersche Tripelsysteme konstruieren, wobei $b = \frac{n(n-1)}{2}$ die Anzahl der Tripel und n die Anzahl der Punkte ist.



In Kapitel II werden zunächst Beispiele für geordnete Steinersche Tripelsysteme betrachtet. Ferner werden Erweiterungsprozesse untersucht, mit deren Hilfe man aus einem vorgegebenen geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung n ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n' = (2n + 1)$ (Cayleyerweiterung) bzw. $n' = 3n$ (Verdreifachung) konstruieren kann. Beim Studium der Cayleyerweiterung erweisen sich die zyklischen Anordnungen der projektiven Ebene $P_2(2)$ über $GF(2)$ als fundamental, d. h. die Cayleyerweiterung des geordneten Steinerschen Tripelsystems $(A, oT) = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{(a_1, a_2, a_3)\})$ der Ordnung 3 führt zu einem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 7, genannt Cayleyebene, dem diese projektive Ebene zugrunde liegt. Weitere sukzessive Cayleyerweiterung führt dann wieder zu geordneten Steinerschen Tripelsystemen, denen projektive Räume zugrunde liegen, und die Cayleyerweiterung eines beliebigen geordneten Steinerschen Tripelsystems hat zu jedem geordneten Tripel des Ausgangssystems eine solche Cayleyebene als Untersystem. Die Verdreifachung steht in entsprechender Beziehung zur affinen Ebene $A_2(3)$ über $GF(3)$, d. h. die Verdreifachung des geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung 3 ist ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung 9, genannt Neunerebene, dem diese affine Ebene zugrunde liegt. Auch hier führt weitere sukzessive Verdreifachung zu geordneten Steinerschen Tripelsystemen, denen affine Räume über $GF(3)$ zugrunde liegen, und die Verdreifachung eines beliebigen geordneten Steinerschen Tripelsystems hat zu jedem Tripel des Grundsystems eine

Neunerebene als Untersystem.

Abschließend werden dann noch Prozesse betrachtet, die aus zwei geordneten Steinerschen Tripelsystemen oS_1 und oS_2 der Ordnungen n und m eines der Ordnung $n' = n \cdot m$ (Parallelprodukt) bzw. $n' = r + n(m - r)$ (Schnittprodukt, r ist die Ordnung eines Untersystems von oS_2) konstruieren.

In Kapitel III werden Kollineationen geordneter Steinerscher Tripelsysteme untersucht. Eine Kollineation des geordneten Steinerschen Tripelsystems (A, oT) ist eine Kollineation des zugehörigen Steinerschen Tripelsystems (A, T) , die die zyklische Anordnung der Punkte in jedem Tripel erhält. Diese Kollineationen müssen alle ungerade Ordnung haben. Zu jeder Untergruppe U der Kollineationsgruppe des Steinerschen Tripelsystems (A, T) mit ungerader Ordnung gibt es ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das U als eine Gruppe von Kollineationen hat und aus (A, T) entstanden ist. Weiterhin werden die Kollineationsgruppen von geordneten Steinerschen Tripelsystemen betrachtet, die durch einen der angegebenen Erweiterungsprozesse entstanden sind. Dabei stellt man fest, daß die Cayleyerweiterung ein starrer Prozeß ist, da die Kollineationsgruppe eines durch Cayleyerweiterung entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems nur für die Erweiterung des Systems der Ordnung 3 zur Cayleyebene C zunimmt und in allen übrigen Fällen gleich der Kollineationsgruppe des Grundsystems ist. Die Kollineationsgruppe K der Ordnung 21 der Cayleyebene ($K = \langle \alpha, \beta \rangle$ mit $\alpha^3 = 1, \beta^7 = 1, \beta^\alpha = \beta^2$) ist also isomorph zur Kollineationsgruppe jedes durch sukzessive Cayleyerweiterung aus ihr entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems. Anders ist es bei

der Verdreifachung:

Die Kollineationsgruppe eines durch Verdreifachung entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems ist immer größer als die Kollineationsgruppe des Grundsystems. Sie enthält mindestens das direkte Produkt einer Gruppe der Ordnung 3 mit der Kollineationsgruppe des Grundsystems und, wenn das geordnete Steinersche Tripelsystem (A, oT) durch sukzessive Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist, sogar die 3-Sylowgruppe der Kollineationsgruppe des affinen Raumes $A_n(3)$ über $GF(3)$, der (A, oT) zugrunde liegt.

Für ein geordnetes Steinersches Tripelsystem (A, oT) kann man ähnlich wie für ungeordnete Systeme eine Loop konstruieren, genannt Steiner-Loop $(A^*, \cdot)$. Dabei ist

$A^* = A \cup \{1, -1\} \cup \{-a \mid a \in A\}$ und die Multiplikation definiert durch:

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \forall a \in A^*: & a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \\ & a \cdot (-1) = (-1) \cdot a, (-1)^2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \forall a \in A : & a^2 = (-a)^2 = -1 \\ & a \cdot (-1) = -a \\ & (-a) \cdot (-1) = a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{iii)} \quad \forall a, b \in A \wedge (a, b, c) \in oT: \\ ab = (-a) \cdot (-b) = (-b) a = b (-a) = c \\ ba = (-b) \cdot (-a) = (-a) b = a (-b) = -c \end{aligned}$$

Das einfachste Beispiel einer Steiner-Loop ist die Quaternionengruppe der Ordnung 8.

Eine Algebra mit einer Basis $B = \{1, b_1, \dots, b_n\}$ nennt man eine Steiner-Algebra, wenn $B^* = \{1, b_1, \dots, b_n, -1, -b_1, \dots, -b_n\}$ mit der Multiplikation der Algebra eine Steiner-Loop ist. Wie bereits erwähnt ist die Cayley'sche Oktavenalgebra eine solche Steiner-Algebra.

In Kapitel IV werden Steiner-Loops und Steiner-Algebren betrachtet. Man stellt fest, daß jede Steiner-Algebra quadratisch, flexibel und nichtkommutative Jordan-Algebra ist, d. h. in jeder Steiner-Algebra A gibt es eine Linearform t und eine quadratische Form n , so daß für alle $x \in A: x^2 - t(x)x + n(x) \cdot 1 = 0$ und für alle $x, y \in A: (xy)x = x(yx)$ und $(xy)x^2 = x(yx^2)$ ist. Durch den schon angeführten Cayley-Dickson-Prozeß (vgl. [8]) läßt sich aus einer Steiner-Algebra eine Steiner-Algebra mit doppelter Dimension konstruieren. Entsprechend liefert der oben erwähnte Verdreifachungsprozeß für geordnete Steinersche Tripelsysteme einen Prozeß, mit dem man zu einer Steiner-Algebra eine mit dreifacher Dimension konstruieren kann.

In Kapitel V wird untersucht, welche der 2^b geordneten Steinerschen Tripelsysteme äquivalent-isomorph sind, d. h. zu isomorphen Steiner-Loops führen. Von Bedeutung ist hierfür einerseits die Kollineationsgruppe K des Steinerschen Tripelsystems und andererseits der Rang r der Inzidenzmatrix des Steinerschen Tripelsystems. Die Anzahl der verschiedenen Äquivalenz-Isomorphie-Klassen geordneter Steinerscher Tripelsysteme ist dann größer als $(2^{b-r} \cdot |K|^{-1})$, sie nimmt also für höhere Ordnungen schnell zu. Für die Ordnungen 3, 7 und 9 wurden die

verschiedenen Klassen geordneter Steinerscher Tripelsysteme explizit bestimmt. Es gibt genau ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung 3, 7 bzw. 9 (vgl. z. B. M. Hall [1]). Zu dem Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 gibt es genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, nämlich das der Quaternionengruppe zugrunde liegende. Zu dem Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 7 (der projektiven Ebene über $GF(2)$) gibt es zwei nicht äquivalent-isomorphe geordnete Steinersche Tripelsysteme, die Cayleyebene C und die Π -Ebene Π . (Aus C kann man die Steiner-Loop konstruieren, die zur Cayley'schen Oktavenalgebra führt, Π führt zu einer achtdimensionalen Algebra, die nicht alternativ und nicht nullteilerfrei ist.) Zu dem Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 9 (der affinen Ebene über $GF(3)$) gibt es wieder genau eine Klasse äquivalent-isomorpher geordneter Steinerscher Tripelsysteme.

Inhaltsübersicht

KAPITEL I

Steinersche Tripelsysteme

KAPITEL II

Konstruktion geordneter Steinerscher Tripelsysteme

KAPITEL III

Kollineationen geordneter Steinerscher Tripelsysteme

KAPITEL IV

Algebraische Darstellungen geordneter Steinerscher
Tripelsysteme

KAPITEL V

Klassifikation geordneter Steinerscher Tripelsysteme

KAPITEL I

Steinersche Tripelsysteme

I. 1 Definition

Ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n ($n \in \mathbb{N}$) ist ein Paar (A, T) , wobei A eine Menge von n Elementen, genannt Punkten, ist und T eine Menge von Teilmengen der Menge A , genannt Tripeln, ist, so daß gilt:

- a) In jedem Tripel der Menge T liegen genau drei verschiedene Punkte der Menge A .
- b) Je zwei verschiedene Punkte der Menge A liegen zusammen in genau einem Tripel der Menge T .

I. 2 Beispiele

- a) Jeder projektive Raum $P_k(2)$ über $GF(2)$ ist ein Steinersches Tripelsystem, wenn man die Punkte von $P_k(2)$ mit den Punkten des Steinerschen Tripelsystems und die Geraden von $P_k(2)$ mit den Tripeln des Steinerschen Tripelsystems identifiziert.
- b) Jeder affine Raum $A_k(3)$ über $GF(3)$ ist ein Steinersches Tripelsystem, wenn man die Punkte von $A_k(3)$ mit den Punkten und die Geraden von $A_k(3)$ mit den Tripeln des Steinerschen Tripelsystems identifiziert.
- c) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n = 3$, nämlich die projektive Gerade $P_1(2)$ über $GF(2)$.
- d) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n = 7$, nämlich die projektive Ebene $P_2(2)$ über $GF(2)$.

- e) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n = 9$, nämlich die affine Ebene $A_2(3)$ über $GF(2)$.
- f) Es gibt (bis auf Isomorphie) genau zwei verschiedene Steinersche Tripelsysteme der Ordnung $n = 13$ und genau 80 verschiedene Steinersche Tripelsysteme der Ordnung $n = 15$ (vgl. [1] S. 237).

Bei allen diesen Beispielen ist die Ordnung n des Steinerschen Tripelsystems $1 \bmod 6$ oder $3 \bmod 6$.
Es gilt sogar:

I. 3 Satz

Ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n existiert genau dann, wenn $n = 1 \bmod 6$ oder $n = 3 \bmod 6$.

Zum Beweis betrachte man z. B. [2] oder [3].

I. 4 Definition

Sei $S = (A, T)$ ein Steinersches Tripelsystem.
Ein Untersystem $S' = (A', T')$ ist ein Steinersches Tripelsystem, dessen Punktmenge A' eine Untermenge von A ist und dessen Tripelmenge T' eine Untermenge von T ist, so daß jedes Tripel $t \in T$, das zwei Punkte aus A' enthält auch in T' liegt. Ist $A' \neq A$, so nennt man S' ein echtes Untersystem.

Ein echtes Untersystem S' von S heißt projektive Hyperebene, wenn jedes Tripel von S mit S' nicht-leeren Schnitt hat.

Ein echtes nichtleeres Untersystem S' von S heißt affine Hyperebene, wenn zu jedem Punkt x von S , der nicht in S' liegt, $S'' = (A'', T'')$ mit $T'' = \{t \in T \mid x \in t \wedge t \cap T' = \emptyset\}$ und $A'' = \{a \in A \mid \exists t \in T'' : a \in t\}$ ein Untersystem von S bildet.

Für diese Untersysteme gilt:

I. 5 Satz

- a) Ein Untersystem S' der Ordnung n' eines Steiner-schen Tripelsystems S der Ordnung n ist genau dann eine projektive Hyperebene, wenn $n' = \frac{n-1}{2}$. Die Menge aller projektiven Hyperebenen eines Steiner-schen Tripelsystems bildet einen projektiven Raum über $GF(2)$. Die Dimension dieses projektiven Raumes nennt man die projektive Dimension dp des Steiner-schen Tripelsystems.
- b) Jede affine Hyperebene S' eines Steinerschen Tripelsystems S der Ordnung n hat die Ordnung $n' = \frac{n}{2}$. Sie bestimmt eine Familie von drei parallelen affinen Hyperebenen S', S'' und $S''' = S \setminus (S' \cup S'')$. Die Menge aller affinen Hyperebenen eines Steiner-schen Tripelsystems bildet einen affinen Raum über $GF(3)$. Die Dimension dieses affinen Raumes nennt man die affine Dimension da des Steinerschen Tripelsystems.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [4].

Ein weiteres wichtiges Hilfsmittel zur Untersuchung der Struktur eines Steinerschen Tripelsystems ist die sogenannte Inzidenzmatrix des Systems:

I. 6 Definition

Sei $S = (\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \{t_1, t_2, \dots, t_b\})$ ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n . Die Inzidenzmatrix $M = (m_{ij})$ des Systems ist eine $n \times b$ -Matrix mit $m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_i \notin t_j \\ 1 & \text{falls } a_i \in t_j \end{cases}$

Den Vektor $m_k = (m_{k1}, m_{k2}, \dots, m_{kb})$ nennt man den zum Punkt a_k gehörenden Inzidenzvektor.

Die zu einem Steinerschen Tripelsystem gehörende Inzidenzmatrix ist offensichtlich nicht eindeutig bestimmt, da durch Umnummerierung der Punkte bzw. Tripel des Systems zwar die Inzidenzmatrix, nicht aber das Steinersche Tripelsystem verändert wird. Eindeutig bestimmt ist jedoch der Rang der Inzidenzmatrix über $GF(2)$.

I. 7 Definition

Sei S ein Steinersches Tripelsystem, $rg_2 S$ der (eindeutig bestimmte) Rang einer Inzidenzmatrix von S über $GF(2)$. Dann nennt man $rg_2 S$ den 2-Rang des Steinerschen Tripelsystems S .

Zur Bestimmung des 2-Rangs eines Steinerschen Tripelsystems ist seine projektive Dimension von Bedeutung. Es gilt:

I. 8 Satz

S sei ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n , dp seine projektive Dimension und $rg_2 S$ sein 2-Rang. Dann ist $rg_2 S = n - (dp + 1)$.

Zum Beweis dieses Satzes vergleiche [4].

KAPITEL II

Konstruktion geordneter Steinerscher Tripelsysteme

II. 1 Definition

Ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n ist ein Paar $(A, \mathcal{O}T)$, wobei A eine Menge von n Elementen, genannt Punkten, ist und $\mathcal{O}T$ eine Menge von zyklisch geordneten Teilmengen von A , genannt geordneten Tripeln, ist, so daß gilt:

- a) In jedem geordneten Tripel von $\mathcal{O}T$ liegen genau drei Punkte von A .
- b) Für je zwei verschiedene Punkte a und b von A liegt genau einer der folgenden beiden Fälle vor:
 - i) Es gibt ein geordnetes Tripel t aus $\mathcal{O}T$ mit $t = (a, b, c)$, $c \in A$.
 - ii) Es gibt ein geordnetes Tripel t aus $\mathcal{O}T$ mit $t = (b, a, d)$, $d \in A$.

Dabei ist $(a, b, c) = (b, c, a) = (c, a, b)$
 $\neq (b, a, c)$.

Zwischen geordneten Steinerschen Tripelsystemen und Steinerschen Tripelsystemen besteht ein enger Zusammenhang.

II. 2 Bemerkungen

- a) Sei S ein Steinersches Tripelsystem. Dann kann man aus S ein geordnetes Steinersches Tripelsystem

konstruieren, indem man die Punktmenge beibehält und auf jedem Tripel eine zyklische Anordnung festlegt. Dabei hat man für jedes Tripel 2 Möglichkeiten der zyklischen Anordnung, d. h. insgesamt 2^b Möglichkeiten, wenn b die Anzahl der Tripel angibt.

- b) Sei σS ein geordnetes Steinersches Tripelsystem. Dann kann man aus σS ein Steinersches Tripelsystem konstruieren, indem man die Punktmenge beibehält und die zyklische Anordnung der Tripel vernachlässigt. Dieser Vorgang ist eindeutig.
- c) Die Begriffe Untersystem, projektive bzw. affine Hyperebene und projektive bzw. affine Dimension eines geordneten Steinerschen Tripelsystems sind analog zu Kapitel I definiert.

Ahnlich wie für Steinersche Tripelsysteme kann man auch für geordnete Steinersche Tripelsysteme eine Inzidenzmatrix definieren:

II. 3 Definition

Sei $\sigma S = (\{p_1, \dots, p_n\}, \{ot_1, \dots, ot_b\})$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem. Die $n \times b$ Matrix $M = (m_{ij})$ mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{für } p_i \in ot_j \\ 1 & \text{für } p_i \in ot_j \wedge ot_j = (p_i, p_k, p_l) \\ & \text{mit } i < k < l \vee i < k < l < i \\ -1 & p_i \in ot_j \wedge ot_j = (p_i, p_k, p_l) \\ & \text{mit } i > k > l \vee i > k > l > i \end{cases}$$

nennt man Inzidenzmatrix des geordneten Steinerschen Tripelsystems σS .

Als nächstes sollten Möglichkeiten untersucht werden, aus einem vorgegebenen geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung n ein geordnetes Steinersches Tripelsystem größerer Ordnung zu konstruieren.

II. 4 Definition (Cayleyerweiterung)

Sei $oS = (A, oT)$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n .

- i) Man nehme einen Punkt $j \notin A$ hinzu und bilde alle Tripel durch j und Punkte $a_i \in A$.
Bezeichne den dritten Punkt eines solchen Tripels mit ja_i und gebe die zyklische Anordnung an:
 (j, a_i, ja_i) geordnetes Tripel.
- ii) Für ein geordnetes Tripel (a_i, a_j, a_k) von oT füge die geordneten Tripel (a_i, ja_k, ja_j) ,
 (ja_k, a_j, ja_i) und (ja_j, ja_i, a_k) hinzu.

Dadurch erhält man ein geordnetes Steinersches Tripelsystem oS' der Ordnung $2n + 1$ mit den in i) und ii) angegebenen Punkten und geordneten Tripeln. oS ist dann projektive Hyperebene von oS' . Man bezeichnet den Punkt j als Cayleyerweiterungspunkt bezügl. oS . Ein durch Cayleyerweiterung entstandenes geordnetes Steinersches Tripelsystem hat eine Ordnung $n' = 3 \bmod 12$ oder $n' = 7 \bmod 12$.

Um die Konstruktion der Cayleyerweiterung zu verdeutlichen, wird jetzt ein Beispiel für eine solche angegeben.

II. 5 Beispiel

Sei $oS = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{ (a_1, a_2, a_3) \})$ das (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmte geordnete Steinersche Tripelsystem der Ordnung 3.

Durch Cayleyerweiterung dieses Systems erhält man die sogenannte Cayleyebene $C = (A, oT)$ mit

$$A = \{a_1, a_2, a_3, j, ja_1, ja_2, ja_3\}$$

$$oT = \{(a_1, a_2, a_3), (j, a_1, ja_1), (j, a_2, ja_2), \\ (j, a_3, ja_3), (a_1, ja_3, ja_2), (ja_3, a_2, ja_1), \\ (ja_2, ja_1, a_3)\}$$

Aus diesem Beispiel und nach Konstruktion der Cayleyerweiterung erkennt man:

II. 6 Bemerkung

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch n -fache Cayleyerweiterung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist das Steinersche Tripelsystem, das oS zugrunde liegt, ein projektiver Raum der Dimension $(n + 1)$ über $GF(2)$.

Als nächstes sollen Bedingungen dafür angegeben werden, wann sich ein gegebenes geordnetes Steinersches Tripelsystem als Cayleyerweiterung eines Untersystems auffassen läßt.

II. 7 Satz

$\mathcal{OS}$ sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem:
Genau dann ist $\mathcal{OS}$ als Cayleyerweiterung entstanden,
wenn gilt:

1. $\mathcal{OS}$ hat eine projektive Hyperebene H .
2. Es gibt einen Punkt j aus $\mathcal{OS}$ mit der Eigenschaft, daß je zwei geordnete Tripel durch j eine Cayleyebene aufspannen. Ist (j, x, y) ein geordnetes Tripel durch j , so liegt x in H und y in $\mathcal{OS} - H$.
3. Jedem geordneten Tripel (h, e, f) mit $h \in H$, $e, f \notin H \cup \{j\}$ entspricht in H ein geordnetes Tripel (h, h_f, h_e) , so daß auch (j, h_f, f) und (j, h_e, e) geordnete Tripel sind.

j ist dann Cayleyerweiterungspunkt bezüglich der projektiven Hyperebene H .

Der Beweis dieses Satzes ist nach Definition der Cayleyerweiterung klar.

Es erhebt sich die Frage, ob der Cayleyerweiterungspunkt j eines durch Cayleyerweiterung entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems eindeutig bestimmt ist oder ob bezüglich einer anderen projektiven Hyperebene ein anderer Punkt Cayleyerweiterungspunkt sein kann.

Man erhält zunächst:

II. 8 Satz

C sei die Cayleyebene. Dann ist jeder Punkt von C Cayleyerweiterungspunkt bezüglich eines geordneten Tripels. (In der Cayleyebene sind die geordneten Tripel projektive Hyperebenen). Zu verschiedenen Punkten gehören auch verschiedene geordnete Tripel als Erweiterungshyperebenen.

Beweis:

Die Cayleyebene sei wie in II. 5 bezeichnet.

Aus der Konstruktion ist klar, daß j Cayleyerweiterungspunkt bezüglich des Tripels (a_1, a_2, a_3) ist.

Man erkennt weiter, daß auch alle weiteren Punkte Cayleyerweiterungspunkte sind, und zwar:

a_1 bzgl. des Tripels (a_2, ja_1, ja_3) ,
 a_2 bzgl. des Tripels (a_3, ja_2, ja_1) ,
 a_3 bzgl. des Tripels (a_1, ja_3, ja_2) ,
 ja_1 bzgl. des Tripels (j, a_3, ja_3) ,
 ja_2 bzgl. des Tripels (j, a_1, ja_1) und
 ja_3 bzgl. des Tripels (j, a_2, ja_2) .

Die Cayleyebene nimmt damit eine Ausnahmestellung ein.

Für sukzessive Cayleyerweiterungen gilt nämlich:

II. 9 Satz

Sei C^j ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch Cayleyerweiterung aus der Cayleyebene entstanden ist.

Dann ist der Cayleyerweiterungspunkt und damit auch die zugehörige projektive Hyperebene eindeutig bestimmt.

Beweis:

Wenn ein Punkt a Cayleypunkt eines geordneten Steinerschen Tripelsystems ist, dann ist er auch Cayleypunkt eines jeden Untersystems H davon mit $a \in H$.

C^j sei Cayleyerweiterung der Cayleyebene C bezüglich des Cayleypunktes j .

Dabei sei

$$C = (\{a_1, a_2, \dots, a_7\}, \{(a_1, a_2, a_3), (a_3, a_6, a_5), (a_5, a_4, a_1), (a_1, a_7, a_6), (a_3, a_7, a_4), (a_5, a_7, a_2), (a_2, a_6, a_4)\}).$$

C^j enthält 7 isomorphe projektive Hyperebenen H_i ($i = 1, \dots, 7$), die mit C genau ein geordnetes Tripel gemeinsam haben und j nicht enthalten, z. B.:

$$H_1 = (\{a_1, a_2, a_3, ja_4, ja_5, ja_6, ja_7\}, \{(a_1, a_2, a_3), (a_1, ja_4, ja_5), (a_1, ja_6, ja_7), (a_2, ja_7, ja_5), (a_2, ja_4, ja_6), (a_3, ja_5, ja_6), (a_3, ja_4, ja_7)\})$$

H_1 ist nicht isomorph zur Cayleyebene, ist also keine Cayleyerweiterung und hat keinen Cayleypunkt. Zu jedem geordneten Tripel (a_i, a_j, a_k) der Cayleyebene C gibt es eine solche projektive Hyperebene H_1 , die die Punkte $a_i, a_j, a_k, ja_1, ja_m, ja_n, ja_o$ enthält, wobei i, j, k, l, m, n, o paarweise verschieden sind. Alle Punkte von C^j außer dem Cayleypunkt j liegen somit in einer dieser Hyperebenen, sind also keine Cayleypunkte. D. h. der Cayleypunkt von C^j ist eindeutig bestimmt.

Aus Satz II. 9 läßt sich jetzt die Eindeutigkeit des Cayleyerweiterungspunktes für ein beliebiges durch Cayleyerweiterung entstandenes geordnetes Steinersches Tripelsystem folgern.

II. 10 Satz

σS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n \neq 7$, das durch Cayleyerweiterung entstanden ist. Dann ist der Cayleyerweiterungspunkt eindeutig bestimmt.

Beweis:

Angenommen j und j' seien zwei verschiedene Cayleyerweiterungspunkte von σS mit zugehörigen projektiven Hyperebenen H und H' . H und H' schneiden sich mindestens in einem geordneten Tripel. Wähle also $t = (a, b, c) \in H \cap H'$. Weiter existiert ein geordnetes Tripel t' , das sowohl j , als auch j' enthält.

Sei o.B.d.A $t' = (j, j', x)$

Also liegt j' in H und x in H' .

Durch $\{a, b, c, j'\}$ wird in H eine Cayleyebene aufgespannt.

$\langle a, b, c, j', j \rangle$ ist dann Cayleyerweiterung dieser Cayleyebene mit j als Erweiterungspunkt.

Weiter ist $H' \cap \langle a, b, c, j', j \rangle = : R$

Da j' Cayleyerweiterungspunkt bezüglich H' ist, ist j' auch Cayleyerweiterungspunkt bezüglich R in $\langle a, b, c, j', j \rangle$.

$\langle a, b, c, j', j \rangle$ ist Cayleyerweiterung einer Cayleyebene und enthält nach Satz II. 8 genau einen Cayleyerweiterungspunkt.

Damit ist die Annahme widerlegt, und es gibt in oS genau einen Cayleyerweiterungspunkt.

Abschließend zur Betrachtung der Cayleyerweiterung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems soll noch angegeben werden, wie sich aus der Inzidenzmatrix eines geordneten Steinerschen Tripelsystems feststellen läßt, ob es als Cayleyerweiterung entstanden ist.

II. 11 Satz

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n = 7 \bmod 12$ oder $n = 3 \bmod 12$.

oS ist genau dann Cayleyerweiterung einer projektiven Hyperebene von oS, wenn sich seine Inzidenzmatrix M folgendermaßen darstellen läßt:

$$M = \left[\begin{array}{c|cccc} E & & & & \\ \hline E \frac{n-1}{2} & A & & & \\ \hline E \frac{n-1}{2} & Nn, \frac{(n-1)(n-3)}{12} & S_1 & S_2 & \dots S \frac{(n-1)(n-3)}{12} \end{array} \right]$$

Wobei E eine $1 \times \frac{(n-1)}{2}$ Matrix ist, die nur aus Einsen besteht, N eine $1 \times \frac{(n-1)(n-3)}{3}$ Matrix, die nur aus Nullen besteht, $E \frac{n-1}{2}$ die $\frac{n-1}{2} \times \frac{n-1}{2}$

Einheitsmatrix, $N, \frac{(n-1)(n-3)}{12}$ eine $\frac{n-1}{2} \times \frac{(n-1)(n-3)}{12}$

Matrix aus Nullen, $A = (a_{ij})$ die Inzidenzmatrix eines geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung $\frac{n-1}{2}$ und die $S_k = (s_{lm}^k)$ ($k = 1, \dots, \frac{(n-1)(n-3)}{12}$) $n-1 \times 3$ Matrizen mit

$$S_{lm}^k = \begin{cases} -b & m=1 \wedge (l=p \vee l=\frac{n+1}{2} + q \vee l=\frac{n+1}{2} + r) \\ -b & m=3 \wedge (l=r \vee l=\frac{n+1}{2} + p \vee l=\frac{n+1}{2} + q) \\ b & \text{falls } m=2 \wedge (l=q \vee l=\frac{n+1}{2} + p \vee l=\frac{n+1}{2} + r) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wenn $a_{ik} = b$ für $i = p, q, r$ und $p < q < r$.

Beweis:

Aus der Definition der Cayleyerweiterung unter Beachtung der Tatsache, daß $p_1 \in$ Cayleyerweiterungspunkt und die Punkte $p_2, \dots, p_{\frac{n+1}{2}}$ die zu-

gehörige projektive Hyperebene aufspannen,
ist der Beweis klar.

Als letztes soll noch die Inzidenzmatrix der
Cayleyebene angegeben werden.

II. 12 Beispiel

C sei die Cayleyebene, wie sie in II. 5 angegeben ist.

Setze: $p_1 = j$, $p_2 = a_1$, $p_3 = a_2$, $p_4 = a_3$,
 $p_5 = ja_1$, $p_6 = ja_2$, $p_7 = ja_3$

Die Inzidenzmatrix der Cayleyebene ist dann bei
geeigneter Nummerierung der geordneten Tripel:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eine weitere Möglichkeit aus einem geordneten
Steinerschen Tripelsystem eines mit höherer
Ordnung zu konstruieren ist die Verdreifachung.
Dabei ist die Ordnung des entstehenden geordneten
Steinerschen Tripelsystems dreimal so groß wie
die des vorgegebenen.

II. 13 Definition (Verdreifachung)

Sei $oS = (A, oT)$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Man nehme weitere Punkte $a_{n+1}, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}, \dots, a_{3n}$ hinzu und definiere eine Menge oT' geordneter Tripel:

- a) $(a_{1n+i}, a_{1n+j}, a_{1n+k}) \in oT'$ für $i = 0, 1, 2$ falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT$
- b) $(a_i, a_{n+j}, a_{2n+k}) \in oT'$, falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT$
- c) $(a_i, a_{2n+j}, a_{n+k}) \in oT'$, falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT$
- d) $(a_i, a_{n+i}, a_{2n+i}) \in oT'$ für $i = 1, \dots, n$

Dann ist $oS' = (A', oT')$ mit $A' = \{a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{3n}\}$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $3n$. oS ist affine Hyperebene von oS' .

Zur Verdeutlichung dieser Konstruktion sollen jetzt zwei Beispiele angegeben werden:

II. 14 Beispiele

- a) Sei $oS = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{(a_1, a_2, a_3)\})$ das geordnete Steinersche Tripelsystem der Ordnung 3. Durch Verdreifachung erhält man die sogenannte Neunerebene $N = (A', oT')$ mit

$$A' = \{a_1, \dots a_9\}$$

$$oT' = \{(a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), (a_7, a_8, a_9), \\ (a_1, a_5, a_9), (a_2, a_6, a_7), (a_3, a_4, a_8), \\ (a_1, a_8, a_5), (a_2, a_9, a_4), (a_3, a_7, a_5), \\ (a_1, a_4, a_7), (a_2, a_5, a_8), (a_3, a_6, a_9)\}$$

b) Sei $C = (A, oT)$ die Cayleyebene wie in II. 5 definiert mit $A = \{a_1, \dots a_7\}$ und

$$oT = \{(a_1, a_2, a_3), (a_3, a_6, a_5), (a_5, a_4, a_1), \\ (a_1, a_7, a_6), (a_3, a_7, a_4), (a_5, a_7, a_2), \\ (a_2, a_6, a_4)\}.$$

Durch Verdreifachung erhält man $oS' = (A', oT')$

mit $A' = \{a_1, \dots a_{21}\}$ und

$$oT' = \{(a_1, a_2, a_3), (a_3, a_6, a_5), (a_5, a_4, a_1), \\ (a_1, a_7, a_6), (a_3, a_7, a_4), (a_5, a_7, a_2), \\ (a_2, a_6, a_4), \\ (a_8, a_9, a_{10}), (a_{10}, a_{13}, a_{12}), (a_{12}, a_{11}, a_8) \\ (a_8, a_{14}, a_{13}), (a_{10}, a_{14}, a_{11}), (a_{12}, a_{14}, a_9) \\ (a_9, a_{13}, a_{11}), \\ (a_{15}, a_{16}, a_{17}), (a_{17}, a_{20}, a_{19}), \\ (a_{19}, a_{18}, a_{15}), (a_{15}, a_{21}, a_{20}), \\ (a_{17}, a_{21}, a_{18}), (a_{19}, a_{21}, a_{16}), \\ (a_{16}, a_{20}, a_{18}), \\ (a_1, a_9, a_{17}), (a_3, a_{13}, a_{19}), (a_5, a_{11}, a_{15}), \\ (a_1, a_{14}, a_{20}), (a_3, a_{14}, a_{18}), \\ (a_5, a_{14}, a_{16}), (a_2, a_{13}, a_{18}), \\ (a_2, a_{10}, a_{15}), (a_6, a_{12}, a_{17}), (a_4, a_8, a_{19}), \\ (a_7, a_{13}, a_{15}), (a_7, a_{11}, a_{17}), (a_7, a_9, a_{19}), \\ (a_6, a_{11}, a_{16}), \\ (a_3, a_8, a_{14}), (a_5, a_{10}, a_{20}), (a_1, a_{12}, a_{18}), \\ (a_6, a_8, a_{21}), (a_4, a_{10}, a_{21}), (a_2, a_{12}, a_{21}), \\ (a_4, a_9, a_{20}),$$

$(a_1, a_{16}, a_{10}), (a_3, a_{20}, a_{12}),$
 $(a_5, a_{18}, a_8), (a_1, a_{21}, a_{13}), (a_3, a_{21}, a_{11}),$
 $(a_5, a_{21}, a_9), (a_2, a_{20}, a_{11}),$
 $(a_2, a_{17}, a_8), (a_6, a_{19}, a_{10}), (a_4, a_{15}, a_{12}),$
 $(a_7, a_{20}, a_8), (a_7, a_{18}, a_{10}), (a_7, a_{16}, a_{12}),$
 $(a_6, a_{18}, a_9),$
 $(a_3, a_{15}, a_9), (a_5, a_{17}, a_{13}), (a_1, a_{19}, a_{11}),$
 $(a_6, a_{15}, a_{14}), (a_4, a_{17}, a_{14}), (a_2, a_{19}, a_{14})$
 $(a_4, a_{16}, a_{13}),$
 $(a_1, a_8, a_{15}), (a_2, a_9, a_{16}), (a_3, a_{10}, a_{17}),$
 $(a_4, a_{11}, a_{18}), (a_5, a_{12}, a_{19}), (a_6, a_{13}, a_{20})$
 $(a_7, a_{14}, a_{21})\}$

Man bemerkt, daß oS' drei affine Hyperebenen

H_1, H_2, H_3 enthält, die isomorph zur Cayleyebene
sind, und 7 Untersysteme $U_1, \dots, U_7$, die isomorph
zur Neunerebene sind und zwar:

$H_1 = oS;$

H_2 enthält die Punkte $a_8, \dots, a_{14};$

H_3 enthält die Punkte $a_{15}, \dots, a_{21};$

U_1 enthält die Punkte $a_1, a_2, a_3, a_8, a_9, a_{10}, a_{15},$
 $a_{16}, a_{17};$

U_2 enthält die Punkte $a_3, a_6, a_5, a_{10}, a_{13}, a_{12},$
 $a_{17}, a_{20}, a_{19};$

U_3 enthält die Punkte $a_5, a_4, a_1, a_{12}, a_{11}, a_8, a_{19},$
 $a_{18}, a_{15};$

U_4 enthält die Punkte $a_1, a_7, a_6, a_8, a_{14}, a_{13}, a_{15},$
 $a_{21}, a_{20};$

U_5 enthält die Punkte $a_3, a_7, a_4, a_{10}, a_{14}, a_{11}, a_{17},$
 $a_{21}, a_{18};$

U_6 enthält die Punkte $a_5, a_7, a_2, a_{12}, a_{14}, a_9, a_{19},$
 $a_{21}, a_{16};$

U_7 enthält die Punkte $a_2, a_6, a_4, a_9, a_{13}, a_{11}, a_{16},$
 $a_{20}, a_{18}.$

Weitere Untersysteme enthält oS' nicht.

Daraus ergibt sich sofort für den allgemeinen Fall:

II. 15 Bemerkung

oS' sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n' , das durch Verdreifachung aus einem geordneten Steinerschen Tripelsystem oS der Ordnung $n = \frac{n'}{3}$ entstanden ist. Dann enthält oS' drei parallele affine Hyperebenen H_1, H_2, H_3 isomorph zu oS und zu jedem Tripel t_i von oS ein Untersystem U_i , das isomorph zur Neunerebene ist. Numeriert man die Punkte von oS' analog zu II. 12, so enthalten diese Untersysteme folgende Punkte:

$$H_1: a_1, \dots, a_n$$

$$H_2: a_{n+1}, \dots, a_{2n}$$

$$H_3: a_{2n+1}, \dots, a_{3n}$$

$$U_i: a_1, a_m, a_k, a_{1+n}, a_{m+n}, a_{k+n}, a_{1+2n}, a_{m+2n}, a_{k+2n},$$

$$\text{wenn das Tripel } t_i = (a_1, a_m, a_k).$$

Ähnlich wie bei der Cayleyerweiterung erkennt man auch bei der Verdreifachung aus der Definition und dem Beispiel II. 14 a):

II. 16 Bemerkung

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch n -fache Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist. ($n \in \mathbb{N}$). Dann ist das Steinersche Tripelsystem das oS zugrundeliegt, ein affiner Raum der Dimension $(n + 1)$ über $\text{GF}(3)$.

Die Cayleyerweiterung und die Verdreifachung sind zwei Möglichkeiten aus einem geordneten Steinerschen Tripelsystem ein neues geordnetes Steinersches Tripelsystem zu konstruieren. Im folgenden sollen jetzt Möglichkeiten angegeben werden, aus zwei vorgegebenen geordneten Steinerschen Tripelsystemen ein neues von größerer Ordnung zu konstruieren.

II. 17 Definition

$\text{oS}_1 = (A, \text{oT}_A)$ und $\text{oS}_2 = (B, \text{oT}_B)$ seien zwei geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung n bzw. m mit

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ und $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$.

1. Zu oS_1 und oS_2 konstruiere man ein geordnetes Steinersches Tripelsystem $\text{oS} = (C, \text{oT})$ nach folgender Vorschrift:

C enthalte die Punkte c_{ij} mit $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, m$, d. h.

$C = \{c_{11}, \dots, c_{1m}, c_{21}, \dots, c_{2m}, c_{31}, \dots, c_{nm}\}.$

Auf C definiere eine Menge oT geordneter Tripel:

- a) $(c_{ir}, c_{is}, c_{it}) \in oT$ für $i = 1, \dots, n$, falls
 $(b_r, b_s, b_t) \in oT_B$
- b) $(c_{ir}, c_{jr}, c_{kr}) \in oT$ für $r = 1, \dots, m$, falls
 $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$
- c) $(c_{ir}, c_{js}, c_{kt}) \in oT$, falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$
 und $(b_r, b_s, b_t) \in oT_B$
- d) $(c_{ir}, c_{ks}, c_{jt}) \in oT$, falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$
 und $(b_r, b_s, b_t) \in oT_B$

$oS = (C, oT)$ ist dann ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $n \cdot m$. Es enthält m parallele Untersysteme der Ordnung n mit den Punkten $c_{1r}, c_{2r}, \dots, c_{nr}$ ($r = 1, \dots, m$) isomorph zu oS_1 und n parallele Untersysteme der Ordnung m mit den Punkten $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{im}$ ($i = 1, \dots, n$) isomorph zu oS_2 .

Bezeichne oS als das Parallelprodukt von oS_1 mit oS_2 :

$$oS = oS_1 \textcircled{p} oS_2.$$

2. $oS_R = (R, oT_R)$ sei ein Untersystem der Ordnung r von oS_2 . Die Punkte von oS_2 seien so nummeriert, daß $R = \{b_{m-r+1}, b_{m-r+2}, \dots, b_m\}$. Dabei kann R auch nur aus dem Punkt b_m bestehen, d. h.

$$oS_R = (\{b_m\}, \emptyset)$$

Zu oS_1 und oS_2 konstruiere man bzgl. oS_R ein geordnetes Steinersches Tripelsystem $oS = (D, oT)$ nach folgender Vorschrift:

D enthalte die Punkte d_{ij} mit $i = 1, \dots, n$,
 $j = 1, \dots, m-r$ und d_{ok} mit $k = m-r+1, m-r+2, \dots, m$.

Auf D definiere eine Menge oT geordneter Tripel:

- a) $(d_{op}, d_{oq}, d_{ot}) \in oT$, falls $(b_p, b_q, b_t) \in oT_R$
- b) $(d_{ip}, d_{iq}, d_{ot}) \in oT$ für $i = 1, \dots, n$, falls
 $(b_p, b_q, b_t) \in oT_B$
- c) $(d_{ip}, d_{iq}, d_{it}) \in oT$ für $i = 1, \dots, n$, falls
 $(b_p, b_q, b_t) \in oT_B$
- d) $(d_{ix}, d_{jy}, d_{kz}) \in oT$, falls $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$ und
 $x+y+z \equiv 3 \pmod{m-r}$

$oS = (DoT)$ ist dann ein geordnetes Steinersches
 Tripelsystem der Ordnung $l = r + n(m-r)$. Es
 enthält ein Untersystem der Ordnung n mit den
 Punkten $d_{11}, d_{21}, \dots, d_{n1}$ isomorph zu oS_1 und
 n Untersysteme der Ordnung m mit den Punkten
 $d_{i1}, \dots, d_{im-r}, d_{om-r+1}, \dots, d_{om}$ ($i = 1, \dots, n$)
 isomorph zu oS_2 , die sich in dem Untersystem
 der Ordnung r mit den Punkten $d_{om-r+1}, \dots, d_{om}$
 isomorph zu oS_R schneiden.

Bezeichne oS als das Schnittprodukt von oS_1
 mit oS_2 bzgl. oS_R : $oS = oS_1 \bigcirc_r oS_2 (oS_R)$.

Bevor jetzt einige Beispiele für das Parallel-
 produkt bzw. die Schnittprodukte zweier geordneter
 Steinerscher Tripelsysteme angegeben werden,
 sollen noch einige allgemeine Eigenschaften
 dieser Produkte aufgeführt werden.

II. 18 Bemerkungen

$oS_1 = (A, oT_A)$ und $oS_2 = (B, oT_B)$ seien wieder geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung n bzw. m wie in II. 17.

1. Das Parallelprodukt von oS_1 mit oS_2 ist im allgemeinen nicht isomorph zum Parallelprodukt von oS_2 mit oS_1 .
2. Das Parallelprodukt von einem geordneten Steinerschen Tripelsystem mit dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 ist isomorph zur Verdreifachung dieses Systems.
3. Das Schnittprodukt von oS_1 mit oS_2 ist abhängig davon bzgl. welches Untersystems von oS_2 es gebildet wird, d. h. man kann i. a. mehrere verschiedene Schnittprodukte von oS_1 mit oS_2 bilden.
4. Das Schnittprodukt eines geordneten Steinerschen Tripelsystems mit dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 (bzgl. des aus einem Punkt bestehenden Untersystems) ist nicht isomorph zur Cayleyerweiterung dieses Systems.

Nun sollen einige Beispiele für das Parallel- bzw. Schnittprodukt zweier geordneter Steinerscher Tripelsysteme angegeben werden.

II. 19 Beispiele

A. oS_1 und oS_2 seien geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung 3, d. h. $oS_1 = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{(a_1, a_2, a_3)\})$ und $oS_2 = (\{b_1, b_2, b_3\}, \{(b_1, b_2, b_3)\})$.

1. Das Parallelprodukt von oS_1 mit oS_2 ist die Neunerebene N (vgl. II. 14 a)
2. Das Schnittprodukt von oS_1 mit oS_2 (bzgl. des aus einem Punkt bestehenden geordneten Steinerschen Tripelsystems $oS_R = (\{b_3\}, \emptyset)$) ist die sogenannte Π -Ebene $\Pi = (D, oT)$ mit
 $D = \{d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}, d_{31}, d_{32}, d_{o3}\}$
 $oT = \{(d_{11}, d_{12}, d_{o3}), (d_{21}, d_{22}, d_{o3}),$
 $(d_{31}, d_{32}, d_{o3}), (d_{11}, d_{21}, d_{31}),$
 $(d_{11}, d_{22}, d_{32}), (d_{12}, d_{21}, d_{32}),$
 $(d_{12}, d_{22}, d_{31})\}$

Die Π -Ebene ist nicht isomorph zur Cayleyebene, allerdings liegt beiden dasselbe Steinersche Tripelsystem zugrunde nämlich die projektive Ebene über $GF(2)$.

B. oS_1 sei wieder das geordnete Steinersche Tripelsystem der Ordnung 3, d. h. $oS_1 = (\{a_1, a_2, a_3\}, \{(a_1, a_2, a_3)\})$,
 oS_2 sei die Cayleyebene $C = (B, oT_B)$ mit
 $B = \{b_1, \dots, b_7\}$
 $oT_B = \{(b_1, b_2, b_7), (b_7, b_6, b_5), (b_5, b_3, b_1),$
 $(b_1, b_4, b_6), (b_7, b_4, b_3), (b_5, b_4, b_2),$
 $(b_2, b_6, b_3)\}.$

1. Das Parallelprodukt $\text{oS}_C = (C, \text{oT}_C)$ von oS_1 mit oS_2 hat die Ordnung 21 und enthält 70 geordnete Tripel. Dabei ist

$C = \{c_{11}, c_{12}, \dots, c_{17}, c_{21}, \dots, c_{27}, c_{31}, \dots, c_{37}\}$
und

$\text{oT}_C = \{ (c_{11}, c_{12}, c_{17}), (c_{17}, c_{16}, c_{15}),$
 $(c_{15}, c_{13}, c_{11}), (c_{11}, c_{14}, c_{16}),$
 $(c_{17}, c_{14}, c_{13}), (c_{15}, c_{14}, c_{12}),$
 $(c_{12}, c_{16}, c_{13}),$
 $(c_{21}, c_{22}, c_{27}), (c_{27}, c_{26}, c_{25}),$
 $(c_{25}, c_{23}, c_{21}), (c_{21}, c_{24}, c_{26}),$
 $(c_{27}, c_{24}, c_{23}), (c_{25}, c_{24}, c_{22}),$
 $(c_{22}, c_{26}, c_{23}),$
 $(c_{31}, c_{32}, c_{37}), (c_{37}, c_{36}, c_{35}),$
 $(c_{35}, c_{33}, c_{31}), (c_{31}, c_{34}, c_{36}),$
 $(c_{37}, c_{34}, c_{33}), (c_{35}, c_{34}, c_{32}),$
 $(c_{32}, c_{36}, c_{33}),$
 $(c_{11}, c_{21}, c_{31}), (c_{12}, c_{22}, c_{32}),$
 $(c_{13}, c_{23}, c_{33}), (c_{14}, c_{24}, c_{34}),$
 $(c_{15}, c_{25}, c_{35}), (c_{16}, c_{26}, c_{36}),$
 $(c_{17}, c_{27}, c_{37}),$
 $(c_{11}, c_{22}, c_{37}), (c_{17}, c_{26}, c_{35}),$
 $(c_{15}, c_{23}, c_{31}), (c_{11}, c_{24}, c_{36}),$
 $(c_{17}, c_{24}, c_{33}), (c_{15}, c_{24}, c_{22}),$
 $(c_{12}, c_{26}, c_{33}),$
 $(c_{21}, c_{32}, c_{17}), (c_{27}, c_{36}, c_{15}),$
 $(c_{25}, c_{33}, c_{11}), (c_{21}, c_{34}, c_{16}),$
 $(c_{27}, c_{34}, c_{13}), (c_{25}, c_{34}, c_{12}),$
 $(c_{22}, c_{36}, c_{13}),$
 $(c_{31}, c_{12}, c_{27}), (c_{37}, c_{16}, c_{25}),$
 $(c_{35}, c_{13}, c_{21}), (c_{31}, c_{14}, c_{26}),$
 $(c_{37}, c_{14}, c_{23}), (c_{35}, c_{14}, c_{22}),$
 $(c_{32}, c_{16}, c_{23}),$

$$\begin{aligned}
& (c_{11}, c_{32}, c_{27}), (c_{17}, c_{36}, c_{25}), \\
& (c_{15}, c_{33}, c_{21}), (c_{11}, c_{34}, c_{26}), \\
& (c_{17}, c_{34}, c_{23}), (c_{15}, c_{34}, c_{22}), \\
& (c_{12}, c_{36}, c_{23}), \\
& (c_{31}, c_{22}, c_{17}), (c_{37}, c_{26}, c_{15}), \\
& (c_{35}, c_{23}, c_{11}), (c_{31}, c_{24}, c_{16}), \\
& (c_{37}, c_{24}, c_{13}), (c_{35}, c_{24}, c_{12}), \\
& (c_{32}, c_{26}, c_{13}), \\
& (c_{21}, c_{12}, c_{37}), (c_{27}, c_{16}, c_{35}), \\
& (c_{25}, c_{13}, c_{31}), (c_{21}, c_{14}, c_{36}), \\
& (c_{27}, c_{14}, c_{33}), (c_{25}, c_{14}, c_{32}), \\
& (c_{22}, c_{16}, c_{33})\}
\end{aligned}$$

oS_C hat drei Untersysteme U_1, U_2, U_3 isomorph zur Cayleyebene und 7 Untersysteme $N_1, \dots, N_7$ isomorph zur Neunerebene. Weitere Untersysteme deren Ordnung größer als drei ist, liegen nicht vor. Dabei ist $U_i = (X_i, oT(X_i))$ und

$N_k = (M_k, oT(M_k))$ ($i = 1, 2, 3; k = 1, \dots, 7$) mit

$X_1 = \{c_{11}, \dots, c_{17}\},$

$X_2 = \{c_{21}, \dots, c_{27}\},$

$X_3 = \{c_{31}, \dots, c_{37}\},$

$M_1 = \{c_{11}, c_{12}, c_{17}, c_{21}, c_{22}, c_{27}, c_{31}, c_{32}, c_{37}\},$

$M_2 = \{c_{17}, c_{16}, c_{15}, c_{27}, c_{26}, c_{25}, c_{37}, c_{36}, c_{35}\},$

$M_3 = \{c_{15}, c_{13}, c_{11}, c_{25}, c_{23}, c_{21}, c_{35}, c_{33}, c_{31}\},$

$M_4 = \{c_{11}, c_{14}, c_{16}, c_{21}, c_{24}, c_{26}, c_{31}, c_{34}, c_{36}\},$

$M_5 = \{c_{17}, c_{14}, c_{13}, c_{27}, c_{24}, c_{23}, c_{37}, c_{34}, c_{33}\},$

$M_6 = \{c_{15}, c_{14}, c_{12}, c_{25}, c_{24}, c_{22}, c_{35}, c_{34}, c_{32}\},$

$M_7 = \{c_{12}, c_{16}, c_{13}, c_{22}, c_{26}, c_{23}, c_{32}, c_{36}, c_{33}\}.$

2. Das Schnittprodukt $oS_D = (D, oT_D)$ von oS_1 mit oS_2 bzgl. des Untersystems $R = (\{b_7\}, \emptyset)$ von oS_2 hat die Ordnung 19 und enthält 57 geordnete Tripel.

Dabei ist

$$D = \{ d_{11}, \dots, d_{16}, d_{21}, \dots, d_{26}, d_{31}, \dots, d_{36}, d_{07} \}$$

und

$$\begin{aligned} o_D^{T_D} = \{ & (d_{11}, d_{12}, d_{07}), (d_{07}, d_{16}, d_{15}), \\ & (d_{15}, d_{13}, d_{11}), (d_{11}, d_{14}, d_{16}), \\ & (d_{07}, d_{14}, d_{13}), (d_{15}, d_{14}, d_{12}), \\ & (d_{12}, d_{16}, d_{13}), (d_{21}, d_{22}, d_{07}), \\ & (d_{07}, d_{26}, d_{25}), (d_{25}, d_{23}, d_{21}), \\ & (d_{21}, d_{24}, d_{26}), (d_{07}, d_{24}, d_{23}), \\ & (d_{25}, d_{24}, d_{22}), (d_{22}, d_{26}, d_{23}), \\ & (d_{31}, d_{32}, d_{07}), (d_{07}, d_{36}, d_{35}), \\ & (d_{35}, d_{33}, d_{31}), (d_{31}, d_{34}, d_{36}), \\ & (d_{07}, d_{34}, d_{33}), (d_{35}, d_{34}, d_{32}), \\ & (d_{32}, d_{36}, d_{33}), (d_{11}, d_{21}, d_{31}), \\ & (d_{11}, d_{22}, d_{36}), (d_{11}, d_{23}, d_{35}), \\ & (d_{11}, d_{24}, d_{34}), (d_{11}, d_{25}, d_{33}), \\ & (d_{11}, d_{26}, d_{32}), (d_{12}, d_{21}, d_{36}), \\ & (d_{12}, d_{22}, d_{35}), (d_{12}, d_{23}, d_{34}), \\ & (d_{12}, d_{24}, d_{33}), (d_{12}, d_{25}, d_{32}), \\ & (d_{12}, d_{26}, d_{31}), (d_{13}, d_{21}, d_{35}), \\ & (d_{13}, d_{22}, d_{34}), (d_{13}, d_{23}, d_{33}), \\ & (d_{13}, d_{24}, d_{32}), (d_{13}, d_{25}, d_{31}), \\ & (d_{13}, d_{26}, d_{36}), (d_{14}, d_{21}, d_{34}), \\ & (d_{14}, d_{22}, d_{33}), (d_{14}, d_{23}, d_{32}), \\ & (d_{14}, d_{24}, d_{31}), (d_{14}, d_{25}, d_{36}), \\ & (d_{14}, d_{25}, d_{35}), (d_{15}, d_{21}, d_{33}), \\ & (d_{15}, d_{22}, d_{32}), (d_{15}, d_{23}, d_{31}), \\ & (d_{15}, d_{24}, d_{36}), (d_{15}, d_{25}, d_{35}), \\ & (d_{15}, d_{26}, d_{34}), (d_{16}, d_{21}, d_{32}), \\ & (d_{16}, d_{22}, d_{31}), (d_{16}, d_{23}, d_{36}), \\ & (d_{16}, d_{24}, d_{35}), (d_{16}, d_{25}, d_{34}), \\ & (d_{16}, d_{26}, d_{33}) \}. \end{aligned}$$

oS_D hat drei Untersysteme V_1, V_2, V_3 isomorph zur Cayleyebene und keine weiteren mit Ordnungen die größer als 3 sind.

Dabei ist $V_i = (Y_i, oT(Y_i))$ ($i = 1, 2, 3$) mit

$$Y_1 = \{d_{11}, \dots, d_{16}, d_{07}\},$$

$$Y_2 = \{d_{21}, \dots, d_{26}, d_{07}\},$$

$$Y_3 = \{d_{31}, \dots, d_{36}, d_{07}\}.$$

V_1, V_2, V_3 schneiden sich im Punkt d_{07} .

3. Das Schnittprodukt $oS_E = (E, oT_E)$ von oS_1 mit oS_2 bzgl. des Untersystems $Q =$

$$(\{b_5, b_6, b_7\}, \{(b_5, b_7, b_6)\})$$

von oS_2 hat die Ordnung 15 und enthält 35 geordnete Tripel. Dabei ist

$E = \{e_{11}, \dots, e_{14}, e_{21}, \dots, e_{24}, e_{31}, \dots, e_{34}, e_{05}, e_{06}, e_{07}\}$
und

$$\begin{aligned} oT_E = & \{(e_{11}, e_{12}, e_{07}), (e_{07}, e_{06}, e_{05}), \\ & (e_{05}, e_{13}, e_{11}), (e_{11}, e_{14}, e_{06}), \\ & (e_{07}, e_{14}, e_{13}), (e_{05}, e_{14}, e_{12}), \\ & (e_{12}, e_{06}, e_{13}), (e_{21}, e_{22}, e_{07}), \\ & (e_{05}, e_{23}, e_{21}), (e_{21}, e_{24}, e_{06}), \\ & (e_{07}, e_{24}, e_{23}), (e_{05}, e_{24}, e_{22}), \\ & (e_{22}, e_{06}, e_{23}), (e_{31}, e_{32}, e_{07}), \\ & (e_{05}, e_{33}, e_{31}), (e_{31}, e_{34}, e_{06}), \\ & (e_{07}, e_{34}, e_{33}), (e_{05}, e_{34}, e_{32}), \\ & (e_{32}, e_{06}, e_{33}), (e_{11}, e_{21}, e_{31}), \\ & (e_{11}, e_{22}, e_{34}), (e_{11}, e_{23}, e_{33}), \\ & (e_{11}, e_{24}, e_{32}), \\ & (e_{12}, e_{21}, e_{34}), (e_{12}, e_{22}, e_{33}), \\ & (e_{12}, e_{23}, e_{32}), (e_{12}, e_{24}, e_{31}), \\ & (e_{13}, e_{21}, e_{33}), (e_{13}, e_{22}, e_{32}), \\ & (e_{13}, e_{23}, e_{31}), (e_{13}, e_{24}, e_{34}), \\ & (e_{14}, e_{21}, e_{32}), (e_{14}, e_{22}, e_{31}), \\ & (e_{14}, e_{23}, e_{34}), (e_{14}, e_{24}, e_{33})\}. \end{aligned}$$

oS_E hat drei Untersysteme W_1, W_2, W_3 isomorph zur Cayleyebene und keine weiteren mit Ordnungen größer als 3. Dabei ist $W_i =$

$(Z_i, \text{oT}(Z_i))$ ($i = 1, 2, 3$) mit

$$Z_1 = \{ e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{14}, e_{05}, e_{06}, e_{07} \},$$

$$Z_2 = \{ e_{21}, e_{22}, e_{23}, e_{24}, e_{05}, e_{06}, e_{07} \},$$

$$Z_3 = \{ e_{31}, e_{32}, e_{33}, e_{34}, e_{05}, e_{06}, e_{07} \}.$$

W_1, W_2, W_3 schneiden sich im geordneten Tripel (e_{05}, e_{06}, e_{07}) .

KAPITEL III

Kollineationen geordneter Steinerscher Tripelsysteme

III. 1 Definition

$\text{oS} = (A, \text{oT})$ sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem.

Eine Kollineation φ von oS ist eine bijektive Abbildung von A in sich, so daß für alle geordneten Tripel $t \in \text{oT}$ gilt:

$$t^\varphi := (a, b, c)^\varphi := (a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi) \in \text{oT}$$

Man erkennt, daß jede Kollineation eines geordneten Steinerschen Tripelsystems auch Kollineation des nach II. 2 b zugeordneten Steinerschen Tripelsystems ist. Welche Kollineationen eines Steinerschen Tripelsystems können nun auch Kollineationen eines geordneten Steinerschen Tripelsystems sein?

III. 2 Satz

Sei $\text{oS} = (A, \text{oT}) = (\{a_1, \dots, a_n\}, \{t_1, \dots, t_b\})$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, $\text{Koll}(\text{oS})$ eine Gruppe von Kollineationen dieses Systems. Dann gilt: $|\text{Koll}(\text{oS})| \equiv 1 \pmod{2}$

Beweis

Angenommen 2 teilt die Ordnung von $\text{Koll}(\text{oS})$. Dann gibt es in $\text{Koll}(\text{oS})$ eine Involution φ .

φ ist Involution, d. h. es gibt zwei Punkte $a_i, a_j \in A$ mit $a_i \neq a_j$ und $a_i^\varphi = a_j \wedge a_j^\varphi = a_i$. Sei o. B. d. A. $t = (a_i, a_j, b) \in \mathcal{OT}$ das geordnete Tripel, das a_i und a_j enthält. Dann ist $t^\varphi = (a_i, a_j, b)^\varphi = (a_i^\varphi, a_j^\varphi, b^\varphi) = (a_j, a_i, b^\varphi) = :t'$

t' ist aber kein Tripel von $\mathcal{OS}$, also kann φ kein Kollineation von $\mathcal{OS}$ sein. Das steht im Widerspruch zur Annahme, d. h. die Ordnung jeder Gruppe von Kollineationen eines geordneten Steinerschen Tripelsystems ist ungerade.

Kollineationen gerader Ordnung eines Steinerschen Tripelsystems können demnach nicht Kollineationen eines geordneten Steinerschen Tripelsystems sein. Zu jeder Kollineation ungerader Ordnung eines Steinerschen Tripelsystems kann man aber ein geordnetes Steinersches Tripelsystem konstruieren, so daß sie auch Kollineation dieses geordneten Steinerschen Tripelsystems ist. Es gilt sogar:

III. 3 Satz

Sei S ein Steinersches Tripelsystem, $\text{Koll}(S)$ seine volle Kollineationsgruppe und U eine Untergruppe von $\text{Koll}(S)$ ungerader Ordnung. Dann gibt es ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das nach II. 2 a aus S entstanden ist und U als Gruppe von Kollineationen hat.

Beweis:

Es sei $S = (A, T) = (\{a_1, \dots, a_n\}, \{t_1, \dots, t_b\})$

T zerfällt unter U in Bahnen $B_1, \dots, B_r$.

Nach II. 2 a kann man aus S ein geordnetes Steinersches Tripelsystem konstruieren, indem man auf jedem Tripel $t \in T$ eine zyklische Anordnung angibt.

Wähle aus jeder Bahn B_i ein Tripel $t_{(i)} = \{a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)}\}$ aus, setze auf $t_{(i)}$ eine beliebige zyklische Anordnung fest und setze diese auf B_i folgendermaßen fort:

Sei o.B.d.A. das zu $t_{(i)}$ gehörende geordnete Tripel $ot_{(i)} = (a_{(i)}, b_{(i)}, c_{(i)})$.

Für jedes Tripel $t'_{(i)} \in B_i$ existiert ein $\varphi \in U$ mit $(t_{(i)})^\varphi = t'_{(i)}$. Das zu $t'_{(i)}$ gehörende geordnete Tripel $ot'_{(i)}$ sieht dann so aus:

$ot'_{(i)} = (a_{(i)}^\varphi, b_{(i)}^\varphi, c_{(i)}^\varphi)$.

Auf diese Weise legt man auf allen Tripeln von T eine zyklische Anordnung fest. Diese Anordnung ist eindeutig, da gilt:

Seien $\varphi, \psi \in U$ mit $t_{(i)}^\varphi = t_{(i)}^\psi = t'_{(i)}$.

Es folgt:

$(t'_{(i)})^{\varphi\psi^{-1}} = t'_{(i)}$, d. h. $\varphi\psi^{-1} \in \text{Stab } t_{(i)}$

Da die Ordnung von U ungerade ist, ist $\varphi\psi^{-1}|_{t'_{(i)}}$ entweder die Identität oder eine Abbildung der Ordnung 3. In beiden Fällen ist das mit der zyklischen Anordnung von $ot'_{(i)}$ verträglich.

Das geordnete Steinersche Tripelsystem $oS = (A, oT)$ mit $oT = \{ot_1, \dots, ot_b\}$ hat dann U als Gruppe von Kollineationen.

Es sollen jetzt einige Beispiele für Kollineationsgruppen von geordneten Steinerschen Tripelsystemen angegeben werden.

III. 4 Beispiele

- a) Sei $S = (A, T) = (\{a_1, \dots, a_7\}, \{t_1, \dots, t_7\})$
 die projektive Ebene über $GF(2)$ mit
 $t_1 = \{a_1, a_2, a_3\}$, $t_2 = \{a_3, a_5, a_6\}$, $t_3 = \{a_1, a_4, a_5\}$,
 $t_4 = \{a_1, a_6, a_7\}$, $t_5 = \{a_3, a_4, a_7\}$, $t_6 = \{a_2, a_5, a_7\}$
 und
 $t_7 = \{a_2, a_4, a_6\}$.

Die volle Kollineationsgruppe von S ist die $PGL(3,2)$,
 $|PGL(3,2)| = 168$. Ihre Untergruppen ungerader Ordnung haben die Ordnungen 21, 7 oder 3.
 Untergruppen gleicher (ungerader) Ordnung sind konjugiert.

Die Punkte von S seien wie üblich koordinatisiert:

$$a_1 = (1,0,0), a_2 = (0,1,0), a_3 = (1,1,0), a_4 = (0,0,1) \\ a_5 = (1,0,1), a_6 = (0,1,1), a_7 = (1,1,1).$$

- i) U_1 sei eine Untergruppe der Ordnung 21 von $PGL(3,2)$:

$$U_1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das U_1 als Kollineationsgruppe hat, ist dann $oS_1 = (A, oT_1)$ mit

$$oT_1 = \{ (a_1, a_2, a_3), (a_3, a_6, a_5), (a_5, a_4, a_1), \\ (a_1, a_7, a_6), (a_3, a_7, a_4), (a_5, a_7, a_2), \\ (a_2, a_6, a_4) \}$$

Das ist die Cayleyebene C .

- ii) U_2 sei eine Untergruppe der Ordnung 3 von $PGL(3,2)$:

$$U_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das U_2 als Kollineationsgruppe hat ist dann $oS_2 = (A, oT_2)$ mit

$$oT_2 = \{ (a_1, a_3, a_2), (a_3, a_6, a_5), (a_5, a_4, a_1), \\ (a_1, a_7, a_6), (a_3, a_7, a_4), (a_5, a_7, a_2), \\ (a_2, a_6, a_4) \}$$

Das ist die Π -Ebene Π .

Da $U_2 \not\subseteq U_1$ ist, sind auch oS_1 und oS_2 verschieden.

- b) Sei $S = (A, T) = (\{a_1, \dots, a_9\}, \{t_1, \dots, t_{12}\})$ die affine Ebene über $GF(3)$ mit

$$T = \{ \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}, \\ \{a_1, a_4, a_7\}, \{a_2, a_5, a_8\}, \{a_3, a_6, a_9\}, \\ \{a_1, a_5, a_9\}, \{a_2, a_6, a_7\}, \{a_3, a_4, a_8\}, \\ \{a_1, a_6, a_8\}, \{a_2, a_4, a_9\}, \{a_3, a_5, a_7\} \}$$

Die Ordnung der Kollineationsgruppe K von S ist $|K| = 432 = 2^4 \cdot 3^3$.

Eine Untergruppe U mit größter ungerader Ordnung ist eine 3-Sylowgruppe. Sie hat die Ordnung 27 und alle solchen Untergruppen sind konjugiert.

Die Punkte von S seien wie folgt koordinatisiert:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1,0,0), a_2 = (1,1,0), a_3 = (1,2,0), \\ a_4 &= (1,0,1), a_5 = (1,1,1), a_6 = (1,2,1), \\ a_7 &= (1,0,2), a_8 = (1,1,2), a_9 = (1,2,2). \end{aligned}$$

U sei eine Untergruppe der Ordnung 27 von K:

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Unter der Wirkung von U zerfällt T in zwei Bahnen:

$$\begin{aligned} B_1 = \{ & \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}, \\ & \{a_1, a_5, a_9\}, \{a_4, a_8, a_3\}, \{a_7, a_2, a_6\}, \\ & \{a_1, a_8, a_6\}, \{a_4, a_2, a_9\}, \{a_7, a_5, a_3\} \} \end{aligned}$$

$$B_2 = \{ \{a_1, a_4, a_7\}, \{a_2, a_5, a_8\}, \{a_3, a_6, a_9\} \};$$

Ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das U als Kollineationsgruppe hat, ist dann $\sigma S = (A, \sigma T)$ mit

$$\begin{aligned} \sigma T = \{ & (a_1, a_2, a_3), (a_4, a_5, a_6), (a_7, a_8, a_9), (a_1, a_5, a_9), \\ & (a_3, a_4, a_8), (a_2, a_6, a_7), (a_1, a_8, a_6), (a_2, a_9, a_4), \\ & (a_3, a_7, a_5), (a_1, a_4, a_7), (a_2, a_5, a_8), (a_3, a_6, a_9) \}. \end{aligned}$$

Das ist die Neunerebene N.

Als nächstes wird nun untersucht, wie die Kollineationsgruppe eines geordneten Steinerschen Tripelsystems aussieht, das durch Cayleyerweiterung entstanden ist.

III. 5 Satz

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch Cayleyerweiterung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem oS' entstanden ist, die Ordnung von oS sei verschieden von 7. Dann sind die Kollineationsgruppen von oS und oS' isomorph.

Beweis:

- i) Nach Satz II. 9 ist der Cayleyerweiterungspunkt j und die zugehörige Erweiterungshyperebene oS' eindeutig bestimmt. Für jede Kollineation φ von oS gilt damit: $j^\varphi = j \wedge (oS')^\varphi = oS'$

D. h. jede Kollineation von oS ist bereits eindeutig bestimmt durch ihre Wirkung auf oS' und die Kollineationsgruppe von oS ist isomorph zu einer Untergruppe der Kollineationsgruppe von oS' .

- ii) Es sei φ' eine Kollineation von oS' . Definiere auf oS eine Abbildung φ durch

$$x^\varphi = \begin{cases} x & x = j \\ x^{\varphi'} & \text{falls } x \in oS' \\ y & x \in oS \setminus (oS' \cup \{j\}) \text{ und} \\ & (j, a_x, x) \text{ und } (j, a_x^{\varphi'}, y) \text{ ge-} \\ & \text{ordnete Tripel von } oS \end{cases}$$

φ ist dann eine Kollineation von oS . Auf diese Weise kann man jede Kollineation von oS' auf oS fortsetzen, d. h. die Kollineationsgruppe von oS ist isomorph zur Kollineationsgruppe von oS' .

Aus diesem Satz ergeben sich sofort Folgerungen für geordnete Steinersche Tripelsysteme, die durch sukzessive Cayleyerweiterungen aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden sind.

III. 6 Korollar

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch n-fache Cayleyerweiterung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist. Dann ist seine Kollineationsgruppe isomorph zur Kollineationsgruppe K der Cayleyebene ($n \in \mathbb{N}$).

$$K = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Beweis:

Für $n = 1$ ist oS die Cayleyebene, ihre Kollineationsgruppe ist K.

Nach Satz III. 5 ändert sich die Kollineationsgruppe nicht, wenn man von einem geordneten Steinerschen Tripelsystem zu einem durch Cayleyerweiterung daraus entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystem übergeht. Also ist auch die Kollineationsgruppe eines durch mehrfache Cayleyerweiterung entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems isomorph zu der des Ausgangssystems, d. h. hier zu K.

Bei der Cayleyerweiterung sind demnach die Kollineationsgruppen von Ausgangs- und Endsystem immer isomorph. Anders verhält es sich bei der Verdreifachung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems. Dabei wird die Kollineationsgruppe größer:

III. 7 Satz

$oS' = (A', oT')$ sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem $oS = (A, oT)$ der Ordnung n entstanden ist. K sei eine Gruppe von Kollineationen von oS . Dann hat oS' eine Gruppe K' von Kollineationen, die isomorph ist zum direkten Produkt von K und Z_3 (Z_3 bezeichne die Gruppe der Ordnung 3).

Beweis:

Sei $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $oT = \{t_1, \dots, t_b\}$ und A' und oT' wie in der Definition der Verdreifachung II. 12 gegeben. Weiter seien $(a_i, a_j, a_k) \in oT$ und $\varphi \in K$ beliebig. Definiere jetzt auf oS' eine Abbildung φ' :

$$a_r^{\varphi'} = \begin{cases} a_s & r \in \{1, \dots, n\} \wedge a_r^\varphi = a_s \\ a_{s+n} & \text{für } r \in \{n+1, \dots, 2n\} \wedge a_{r-n}^\varphi = a_s \\ a_{s+2n} & r \in \{2n+1, \dots, 3n\} \wedge a_{r-2n}^\varphi = a_s \end{cases}$$

Dann ist φ' eine Kollineation von oS' .

Sei jetzt $a_i^\varphi = a_h, a_j^\varphi = a_l, a_k^\varphi = a_m$. Dann ist $(a_h, a_l, a_m) \in oT$ und damit

$$(a_{i+qn}, a_{j+qn}, a_{k+qn})^{\varphi'} = (a_{h+qn}, a_{l+qn}, a_{m+qn}) \in oT' \\ \text{für } q = 0, 1, 2$$

$$(a_i, a_{j+n}, a_{k+2n})^{\varphi'} = (a_h, a_{l+n}, a_{m+2n}) \in oT'$$

$$(a_i, a_{j+2n}, a_{k+n})^{\varphi'} = (a_h, a_{l+2n}, a_{m+n}) \in oT'$$

$$(a_i, a_{i+n}, a_{i+2n})^{\varphi'} = (a_h, a_{h+n}, a_{h+2n}) \in oT'$$

D. h. alle geordneten Tripel von oT' werden durch φ' wieder auf geordnete Tripel abgebildet.

Auf diese Weise kann man jede Kollineation von oS zu einer Kollineation von oS' fortsetzen.

Bezeichne die Gruppe dieser Kollineationen von oS' mit $\hat{K}$. Es ist $\hat{K}$ isomorph zu K .

Definiere auf oS eine Abbildung ψ :

$$a_r^\psi = \begin{cases} a_{r+n} & \text{für } r \in \{1, \dots, 2n\} \\ a_{r-2n} & \text{für } r \in \{2n+1, \dots, 3n\} \end{cases}$$

Dann ist ψ eine Kollineation von oS' :

$$(a_i, a_j, a_k)^\psi = (a_{i+n}, a_{j+n}, a_{k+n}) \in oT'$$

$$(a_{i+n}, a_{j+n}, a_{k+n})^\psi = (a_{i+2n}, a_{j+2n}, a_{k+2n}) \in oT'$$

$$(a_{i+2n}, a_{j+2n}, a_{k+2n})^\psi = (a_i, a_j, a_k) \in oT'$$

$$(a_i, a_{j+n}, a_{k+2n})^\psi = (a_{i+n}, a_{j+2n}, a_k) \in oT'$$

$$(a_i, a_{j+2n}, a_{k+n})^\psi = (a_{i+n}, a_j, a_{k+2n}) \in oT'$$

$$(a_i, a_{i+n}, a_{i+2n})^\psi = (a_{i+n}, a_{i+2n}, a_i) \in oT'$$

D. h. alle geordneten Tripel von oT' werden wieder auf geordnete Tripel von oT' abgebildet.

ψ hat die Ordnung 3, d. h. $\langle \psi \rangle$ ist isomorph zu Z_3 .
 Außerdem gilt für alle $\varphi \in \hat{K}$: $\varphi\psi = \psi\varphi$ (i) und
 $\varphi\psi^2 = \psi^2\varphi$ (ii):

Seien $a_r \in A'$ und $\varphi \in \hat{K}$ beliebig mit $a_r^\varphi = a_s$.
 Dann gilt zunächst:

$$\begin{aligned} r \in \{1, \dots, n\} &\Leftrightarrow s \in \{1, \dots, n\} \\ r \in \{n+1, \dots, 2n\} &\Leftrightarrow s \in \{n+1, \dots, 2n\} \\ r \in \{2n+1, \dots, 3n\} &\Leftrightarrow s \in \{2n+1, \dots, 3n\} \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \text{i) } a_r^{\varphi\psi} &= \begin{cases} a_{r+n}^\varphi & \text{für } r \in \{1, \dots, 2n\} \\ a_{r-2n}^\varphi & \text{für } r \in \{2n+1, \dots, 3n\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{s+n} & \text{für } r \in \{1, \dots, 2n\} \\ a_{s-2n} & \text{für } r \in \{2n+1, \dots, 3n\} \end{cases} \\ &= a_s^\psi = a_r^{\psi\varphi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } a_r^{\varphi\psi^2} &= \begin{cases} a_{r+2n}^\varphi & \text{für } r \in \{1, \dots, n\} \\ a_{r-n}^\varphi & \text{für } r \in \{n+1, \dots, 3n\} \end{cases} \\ &= \begin{cases} a_{s+2n} & \text{für } r \in \{1, \dots, n\} \\ a_{s-n} & \text{für } r \in \{2n+1, \dots, 3n\} \end{cases} \\ &= a_s^{\psi^2} = a_r^{\psi^2\varphi} \end{aligned}$$

Die Gruppe $K' := \langle \hat{K}, \psi \rangle$ von Kollineationen von oS'
 ist also direktes Produkt von $\hat{K}$ und $\langle \psi \rangle$
 und damit isomorph zum direkten Produkt von K und Z_3 .

Aus diesem Satz ergibt sich sofort:

III. 8 Korollar

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch $(n-1)$ fache Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist. Dann hat oS eine Gruppe T von Kollineationen, für die gilt:

- i) T ist direktes Produkt von n Gruppen der Ordnung 3:

$$T \cong Z_3 \times Z_3 \times \dots \times Z_3 \quad (n \text{ Faktoren})$$

- ii) T ist die volle Translationsgruppe des affinen Raumes $A_n(3)$ der Dimension n über $\text{GF}(3)$, der oS zugrundeliegt.

Beweis:

- i) Die Kollineationsgruppe des geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung 3 hat die Ordnung 3, ist also isomorph zu Z_3 . Nach Satz III. 7 hat die Verdreifachung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems oS' eine Gruppe von Kollineationen, die direktes Produkt der Kollineationsgruppe von oS' mit einer Gruppe der Ordnung 3 ist. Bei $(n-1)$ -facher Verdreifachung von oS' hat das Endsystem demnach eine Gruppe von Kollineationen, die direktes Produkt der Kollineationsgruppe von oS' und $(n-1)$ Gruppen der Ordnung 3 ist. Also hat oS eine Gruppe T von Kollineationen, die n -faches direktes Produkt von Gruppen der Ordnung 3 ist, d. h.

$$T \cong Z_3 \times Z_3 \times \dots \times Z_3 \quad (n \text{ Faktoren}).$$

- ii) Die Kollineationen des geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung 3 sind die Translationen der affinen Geraden über $GF(3)$. Aus dem Beweis von Satz III. 7 erkennt man, daß die hinzugenommene Kollineation des durch Verdreifachung entstandenen geordneten Steinerschen Tripelsystems wieder eine Translation ist, d. h. alle Kollineationen aus T sind Translationen. Die Ordnung von T ist 3^n , also gleich der Ordnung der vollen Translationsgruppe des affinen Raumes $A_n(3)$ der Dimension n über $GF(3)$. T ist somit die volle Translationsgruppe von $A_n(3)$.

Weiter soll nun untersucht werden, welche zusätzlichen Kollineationen die Verdreifachung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems zuläßt.

III. 9 Satz

$oS = (A, oT)$ sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung $3n$. H_1 , H_2 und H_3 seien drei parallele affine Hyperebenen von oS . $oS' = (A', oT')$ sei die Verdreifachung von oS . Dann enthält oS' ebenfalls drei parallele affine Hyperebenen, H_1' , H_2' und H_3' mit $H_1 \subset H_1'$, $H_2 \subset H_2'$ und $H_3 \subset H_3'$ und es gibt eine Kollineation von oS' der Ordnung 3, die H_1' punktweise festläßt und auf H_2' bzw. H_3' als Translation wirkt.

Beweis:

Die Punkte von oS seien so numeriert, daß $H_1 = \{a_1, \dots, a_n\}$, $H_2 = \{a_{n+1}, \dots, a_{2n}\}$ und

$H_3 = \{a_{2n+1}, \dots, a_{3n}\}$ ist und die Punkte und Tripel von oS' wie in Definition II. 12 benannt.

Dann sind

$H_1' = \{a_1, \dots, a_n, a_{3n+1}, \dots, a_{4n}, a_{6n+1}, \dots, a_{7n}\}$,
 $H_2' = \{a_{n+1}, \dots, a_{2n}, a_{4n+1}, \dots, a_{5n}, a_{7n+1}, \dots, a_{8n}\}$ und
 $H_3' = \{a_{2n+1}, \dots, a_{3n}, a_{5n+1}, \dots, a_{6n}, a_{8n+1}, \dots, a_{9n}\}$
 drei parallele affine Hyperebenen von oS' mit
 $H_1 \subset H_1'$, $H_2 \subset H_2'$ und $H_3 \subset H_3'$.

Auf oS' definiere eine Abbildung φ durch:

Für $i \in \{1, \dots, n\}$ sei

$$\begin{aligned} a_i &\stackrel{\varphi}{=} a_i \\ a_{n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{4n+i} \\ a_{2n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{8n+i} \\ a_{3n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{3n+i} \\ a_{4n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{7n+i} \\ a_{5n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{2n+i} \\ a_{6n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{6n+i} \\ a_{7n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{n+i} \\ a_{8n+i} &\stackrel{\varphi}{=} a_{5n+i} \end{aligned}$$

φ ist dann die gesuchte Kollineation von oS' :

1. Zunächst wird gezeigt, daß φ Kollineation von oS' ist, d. h. daß alle geordneten Tripel von oS' wieder auf geordnete Tripel von oS' abgebildet werden. Alle geordneten Tripel von oS' kann man aus Tripeln von oS konstruieren. Diese teilen sich auf in Tripel in H_1 , Tripel in H_2 , Tripel in H_3 und Tripel mit je einem Punkt in H_1 , H_2 und H_3 .

i) Tripel von oS in H_1 :

Die zu Tripel von H_1 konstruierten Tripel von oS' liegen in H_1' . Man sieht sofort, daß φ H_1'

punktweise festhält, d. h. geordnete Tripel
werden auf sich selbst abgebildet.

ii) Tripel von $\circ S$ in H_2 :

Sei $(a_{n+i}, a_{n+j}, a_{n+k})$ mit $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$
ein geordnetes Tripel von H_2 , dann ist

$$\begin{aligned} a) \quad (a_{n+i}, a_{n+j}, a_{n+k})^\varphi &= (a_{4n+i}, a_{4n+j}, a_{4n+k}) \in \circ T' \\ (a_{4n+i}, a_{4n+j}, a_{4n+k})^\varphi &= (a_{7n+i}, a_{7n+j}, a_{7n+k}) \in \circ T' \\ (a_{7n+i}, a_{7n+j}, a_{7n+k})^\varphi &= (a_{n+i}, a_{n+j}, a_{n+k}) \in \circ T' \end{aligned}$$

$$b) \quad (a_{n+i}, a_{4n+j}, a_{7n+k})^\varphi = (a_{4n+i}, a_{7n+j}, a_{n+k}) \in \circ T'$$

$$c) \quad (a_{n+i}, a_{7n+j}, a_{4n+k})^\varphi = (a_{4n+i}, a_{n+j}, a_{7n+k}) \in \circ T'$$

$$d) \quad (a_{n+i}, a_{4n+i}, a_{7n+i})^\varphi = (a_{4n+i}, a_{7n+i}, a_{n+i}) \in \circ T'$$

iii) Tripel von $\circ S$ in H_2 :

Sei $(a_{2n+i}, a_{2n+j}, a_{2n+k})$ mit $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$
ein geordnetes Tripel von H_3 , dann ist

$$\begin{aligned} a) \quad (a_{2n+i}, a_{2n+j}, a_{2n+k})^\varphi &= (a_{8n+i}, a_{8n+j}, a_{8n+k}) \in \circ T' \\ (a_{5n+i}, a_{5n+j}, a_{5n+k})^\varphi &= (a_{2n+i}, a_{2n+j}, a_{2n+k}) \in \circ T' \\ (a_{8n+i}, a_{8n+j}, a_{8n+k})^\varphi &= (a_{5n+i}, a_{5n+j}, a_{5n+k}) \in \circ T' \end{aligned}$$

$$b) \quad (a_{2n+i}, a_{5n+j}, a_{8n+k})^\varphi = (a_{8n+i}, a_{2n+j}, a_{5n+k}) \in \circ T'$$

$$c) \quad (a_{2n+i}, a_{8n+j}, a_{5n+k})^\varphi = (a_{8n+i}, a_{5n+j}, a_{2n+k}) \in \circ T'$$

$$d) \quad (a_{2n+i}, a_{5n+i}, a_{8n+i})^\varphi = (a_{8n+i}, a_{2n+i}, a_{5n+i}) \in \circ T'$$

iv) Tripel von $\circ S$ mit je einem Punkt in H_1 , H_2
und H_3 :

α) Sei (a_i, a_{n+j}, a_{2n+k}) mit $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$
ein geordnetes Tripel von $\circ S$, dann ist

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (a_i, a_{n+j}, a_{2n+k})^\varphi &= (a_i, a_{4n+j}, a_{8n+k}) \in oT' \\ (a_{3n+i}, a_{4n+j}, a_{5n+k})^\varphi &= (a_{3n+i}, a_{7n+j}, a_{2n+k}) \in oT' \\ (a_{6n+i}, a_{7n+j}, a_{8n+k})^\varphi &= (a_{6n+i}, a_{n+j}, a_{5n+k}) \in oT' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (a_i, a_{4n+j}, a_{8n+k})^\varphi &= (a_i, a_{7n+j}, a_{5n+k}) \in oT' \\ (a_{n+j}, a_{5n+k}, a_{6n+i})^\varphi &= (a_{4n+j}, a_{2n+k}, a_{6n+i}) \in oT' \\ (a_{2n+k}, a_{3n+i}, a_{7n+j})^\varphi &= (a_{8n+k}, a_{3n+i}, a_{n+j}) \in oT' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (a_i, a_{7n+j}, a_{5n+k})^\varphi &= (a_i, a_{n+j}, a_{2n+k}) \in oT' \\ (a_{n+j}, a_{8n+k}, a_{3n+i})^\varphi &= (a_{4n+j}, a_{5n+k}, a_{3n+i}) \in oT' \\ (a_{2n+k}, a_{6n+i}, a_{4n+j})^\varphi &= (a_{8n+k}, a_{6n+i}, a_{7n+j}) \in oT' \end{aligned}$$

β) Sei (a_i, a_{2n+j}, a_{n+k}) mit $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ ein geordnetes Tripel von oS , dann ist

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (a_i, a_{2n+j}, a_{n+k})^\varphi &= (a_i, a_{8n+j}, a_{4n+k}) \in oT' \\ (a_{3n+i}, a_{5n+j}, a_{4n+k})^\varphi &= (a_{3n+i}, a_{2n+j}, a_{7n+k}) \in oT' \\ (a_{6n+i}, a_{8n+j}, a_{7n+k})^\varphi &= (a_{6n+i}, a_{5n+j}, a_{n+k}) \in oT' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (a_i, a_{5n+j}, a_{7n+k})^\varphi &= (a_i, a_{2n+j}, a_{n+k}) \in oT' \\ (a_{2n+j}, a_{4n+k}, a_{6n+i})^\varphi &= (a_{8n+j}, a_{7n+i}, a_{6n+i}) \in oT' \\ (a_{n+k}, a_{3n+i}, a_{8n+j})^\varphi &= (a_{4n+k}, a_{3n+i}, a_{5n+j}) \in oT' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (a_i, a_{8n+j}, a_{4n+k})^\varphi &= (a_i, a_{5n+j}, a_{7n+k}) \in oT' \\ (a_{2n+j}, a_{7n+k}, a_{3n+i})^\varphi &= (a_{8n+j}, a_{n+k}, a_{3n+i}) \in oT' \\ (a_{n+k}, a_{6n+i}, a_{5n+j})^\varphi &= (a_{4n+k}, a_{6n+i}, a_{2n+j}) \in oT' \end{aligned}$$

Alle geordneten Tripel von oS' werden also durch φ wieder auf geordnete Tripel von oS' abgebildet, φ ist bijektiv und somit Kollineation von oS' .

2. Man erkennt sofort, daß $\varphi: H_1' \rightarrow H_1'$ punktweise festläßt und φ/H_2' bzw. φ/H_3' Translationen von H_2' bzw. H_3' sind.

Ein durch fortlaufende Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstandenes geordnetes Steinersches Tripelsystem hat als zugehöriges Steinersches Tripelsystem einen affinen Raum über $GF(3)$. Wenn $n \in \mathbb{N}$ die Dimension dieses affinen Raumes bezeichnet (bzw. $(n-1)$ die Anzahl der Verdreifachungen), so enthält es $(3^{n-1} + 3^{n-2} + \dots + 1)$ Scharen von je drei parallelen affinen Hyperebenen und damit mindestens ebensoviele Kollineationen der in III. 9. beschriebenen Art. Es gilt sogar:

III. 10 Satz

oS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem, das durch $(n-1)$ -fache Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist. Dann hat oS eine Gruppe K von Kollineationen, die einer 3-Sylowgruppe der Kollineationsgruppe des affinen Raumes $A_n(3)$ der Dimension n über $GF(3)$ entspricht. Sie hat die Ordnung $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ und ist semidirektes Produkt der vollen Translationsgruppe $T \cong Z_3 \times \dots \times Z_3$ (n Faktoren) von $A_n(3)$ mit einer 3-Sylowgruppe G_n der $GL(n, 3)$.

Beweis:

1. Nach Korollar III. 8 ist die volle Translationsgruppe T von $A_n(3)$ eine Gruppe von Kollineationen von oS.
 $(|T| = 3^n).$

2. Die Punkte des geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung 3 seien mit a_1 , a_2 und a_3 bezeichnet und die Bezeichnung der weiteren Punkte von oS folge Definition II. 12. Koordinatisiere die Punkte von oS folgendermaßen:

$$a_1 \hat{=} (0, \dots 0)$$

$$a_{3^k+1} \hat{=} (0, 0, \dots 0, 1, 0 \dots 0) \quad (k \in \{0, 1, \dots, n-1\})$$

wobei die $(k+1)$ te Stelle 1 ist und alle anderen Stellen 0 sind. Dadurch sind auch die Koordinaten der übrigen Punkte festgelegt. Den Kollineationen von oS , die a_1 festlassen, wird somit eine $n \times n$ -Matrix zugeordnet.

3. Bezeichne mit $M_{lk}^p = (m_{ij})_{i,j \in \{1, \dots, p\}}$ $p \times p$ Matrizen mit

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \vee (i=1 \wedge j=k) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Die Neunerebene N ist das geordnete Steinersche Tripelsystem, das durch Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist. Ihre Kollineationsgruppe enthält eine Kollineation, der die Matrix M_{21}^2 zugeordnet ist, die einzige Matrix M_{lk}^2 mit $l-k \geq 1$ (vgl. III.4b)
5. oS' sei das durch $(n-2)$ fache Verdreifachung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstandene geordnete Steinersche Tripelsystem. Seine Kollineationsgruppe enthalte Kollineationen, denen die Matrizen M_{lk}^{n-1} mit $l-k \geq 1$ zugeordnet sind.

oS ist die Verdreifachung von oS' .

- i) Jede Kollineation φ' von oS' mit zugehöriger Matrix M_{lk}^{n-1} kann man nach Satz III. 7 zu einer Kollineation φ von oS fortsetzen, deren zugehörige Matrix M_{lk}^n ist, d. h. zu jeder Matrix M_{lk}^n mit $l-k \geq 1$ und $l+n+k$ gibt es eine Kollineation von oS .
- ii) Für $i \in \{1, \dots, n-1\}$ enthält oS drei parallele affine Hyperebenen $H_1 : x_i = 0$, $H_2 : x_i = 1$ und $H_3 : x_i = 2$. Nach Satz III. 9 gibt es dann in oS eine Kollineation, die $H_1' : x_i = 0$ punktweise festläßt und auf $H_2' : x_i = 1$ und $H_3' : x_i = 2$ als Translation wirkt. Ihre zugehörige Matrix ist M_{ni}^n , d. h. zu jeder Matrix M_{nk}^n mit $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gibt es eine Kollineation von oS .
Also hat oS zu jeder Matrix M_{lk}^n mit $l-k \geq 1$ eine Kollineation.
6. Die Matrizen M_{lk}^n erzeugen eine 3-Sylowgruppe der $GL(n, 3)$. Die Ordnung von n ist $3^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
 oS hat also eine Gruppe von Kollineationen, die einer 3-Sylowgruppe der $GL(n, 3)$ isomorph ist.

Die Kollineationsgruppe von oS enthält somit die volle Translationsgruppe T des affinen Raumes $A_n(3)$ der Dimension n über $GF(3)$ und eine Gruppe K von Kollineationen, die der 3-Sylowgruppe der $GL(n, 3)$ entspricht, also auch das Erzeugnis von T und K , d. h. die 3-Sylowgruppe der Kollineationsgruppe des $A_n(3)$.

Als letztes sollen jetzt noch die Kollineationen von geordneten Steinerschen Tripelsystemen untersucht werden, die Parallel- bzw. Schnittprodukt zweier geordneter Steinerschen Tripelsysteme sind. Für das Parallelprodukt gilt:

III. 11 Satz

oS_1 und oS_2 seien geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung n bzw. m , ihre Kollineationsgruppen seien K_1 bzw. K_2 . Das Parallelprodukt oS von oS_1 mit oS_2 hat dann eine Gruppe K von Kollineationen, die isomorph zum direkten Produkt von K_1 und K_2 ist.

Beweis:

Es sei $oS_1 = (A, oT_A)$ mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $oS_2 = (B, oT_B)$ mit $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $oS = (C, oT_C)$ mit $C = \{c_{11}, \dots, c_{nm}\}$ wie in Def. II. 17, und auch die geordneten Tripel von oS seien wie in Def. II. 17 festgelegt.

1. Sei $\rho \in K_1$ beliebig. π sei eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, so daß $a_i^{\rho} = a_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Weiter seien $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$ und $(b_r, b_s, b_t) \in oT_B$, also auch $(a_{\pi(i)}, a_{\pi(j)}, a_{\pi(k)}) \in oT_A$. Auf C definiere eine Abbildung P durch

$$c_{ir}^P = c_{\pi(i)r} \quad \text{für alle } c_{ir} \in C.$$

Die geordneten Tripel von oS werden durch P abgebildet.

- a) $(c_{ir}, c_{is}, c_{it})^P = (c_{\pi(i)r}, c_{\pi(i)s}, c_{\pi(i)t}) \in oT_C$
 b) $(c_{ir}, c_{jr}, c_{kr})^P = (c_{\pi(i)r}, c_{\pi(j)r}, c_{\pi(k)r}) \in oT_C$
 c) $(c_{ir}, c_{js}, c_{kt})^P = (c_{\pi(i)r}, c_{\pi(j)s}, c_{\pi(k)t}) \in oT_C$
 d) $(c_{ir}, c_{ks}, c_{jt})^P = (c_{\pi(i)r}, c_{\pi(k)s}, c_{\pi(j)t}) \in oT_C$

D. h. alle geordneten Tripel von oS werden durch P auf geordnete Tripel von oS abgebildet, also ist P eine Kollineation von oS .

Demnach lassen sich alle Kollineationen von oS_1 auf oS fortsetzen, oS hat eine Gruppe K_1 von Kollineationen, die isomorph zu K_1 ist.

2. Sei $w \in K_2$ beliebig. φ sei eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, m\}$, so daß $b_r^w = b_{\varphi(r)}$ für alle $r \in \{1, \dots, m\}$.

Weiter seien $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$ und $(b_r, b_s, b_t) \in oT_B$, also auch $(b_{\varphi(r)}, b_{\varphi(s)}, b_{\varphi(t)}) \in oT_B$.

Auf C definiere eine Abbildung R durch

$$c_{ir}^R = c_{i\varphi(r)} \text{ für alle } c_{ir} \in C.$$

Die geordneten Tripel von oS werden durch R abgebildet:

- a) $(c_{ir}, c_{is}, c_{it})^R = (c_{i\varphi(r)}, c_{i\varphi(s)}, c_{i\varphi(t)}) \in oT_C$
 b) $(c_{ir}, c_{jr}, c_{kr})^R = (c_{i\varphi(r)}, c_{j\varphi(r)}, c_{k\varphi(r)}) \in oT_C$
 c) $(c_{ir}, c_{js}, c_{kt})^R = (c_{i\varphi(r)}, c_{j\varphi(s)}, c_{k\varphi(t)}) \in oT_C$
 d) $(c_{ir}, c_{ks}, c_{jt})^R = (c_{i\varphi(r)}, c_{k\varphi(s)}, c_{j\varphi(t)}) \in oT_C$

D. h. alle geordneten Tripel von oS werden durch R wieder auf geordnete Tripel von oS abgebildet, R ist eine Kollineation von oS .

Demnach lassen sich auch alle Kollineationen von oS_2 auf oS fortsetzen, oS hat eine Gruppe K_2 von Kollineationen, die isomorph zu K_2 ist.

Sei jetzt $P \in K_1$, $R \in K_2$, π und ϱ wie bisher. Dann gilt für alle $c_{ir} \in C$:

$$\begin{aligned} c_{ir}^{RP} &= c_{\pi(i)r}^R = c_{\pi(i)\varrho(r)} \quad \text{und} \\ c_{ir}^{PR} &= c_{i\varrho(r)}^P = c_{\pi(i)\varrho(r)}. \end{aligned}$$

D. h. für alle $P \in K_1$, $R \in K_2$ gilt: $PR = RP$
es ist also $K = \langle K_1, K_2 \rangle = K_1 + K_2$ isomorph zum direkten Produkt von K_1 und K_2 .

Es wurden hier bestimmte Kollineationen des Parallelproduktes zweier geordneter Steinerscher Tripelsysteme angegeben. Ob das Parallelprodukt noch weitere Kollineationen hat und wie diese aussehen, hängt explizit von den Systemen ab.

(Vgl. dazu die Untersuchungen über Kollineationen der Verdreifachung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems als Spezialfall des Parallelprodukts).

Die Kollineationsgruppe des Schnittprodukts zweier geordneter Steinerscher Tripelsysteme ist i. a. kleiner als die des Parallelprodukts:

III. 12 Satz

oS_1 und oS_2 seien geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung n bzw. m , K_1 sei die Kollineationsgruppe

von oS_1 . Das Schnittprodukt oS von oS_1 mit oS_2 bzgl. eines beliebigen Untersystems von oS_2 hat eine Gruppe K von Kollineationen, die isomorph zu K_1 ist.
(I. a. lassen sich die Kollineationen von oS_2 nicht auf oS fortsetzen).

Beweis:

Es sei $oS_1 = (A, oT_A)$ mit $A = \{a_1, \dots, a_n\}$,
 $oS_2 = (B, oT_B)$ mit $B = \{b_1, \dots, b_m\}$, $oS_R = (R, oT_R)$
mit $R = \{b_{m-r+1}, \dots, b_m\}$ ein Untersystem der Ordnung r
von oS_2 , $oS = (D, oT_D)$ mit $D = \{d_{11}, \dots, d_{n(m-r)},$
 $d_{o(m-r+1)}, \dots, d_{om}\}$ wie in Definition II. 17 und
auch die geordneten Tripel von oS seien wie in Definition II. 17 festgelegt.

Sei $P \in K_1$ beliebig. π sei eine Permutation der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$, so daß $a_i^P = a_{\pi(i)}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$.

Weiter seien $(a_i, a_j, a_k) \in oT_A$ und $(b_p, b_q, b_t) \in oT_B$,
also auch $(a_{\pi(i)}, a_{\pi(j)}, a_{\pi(k)}) \in oT_A$,

Auf D definiere eine Abbildung P durch

$$d_{ix}^P = \begin{cases} d_{\pi(i)x} & \text{für } i \neq 0 \\ d_{ox} & i = 0 \end{cases}$$

Die geordneten Tripel von oS werden durch P abgebildet:

- a) $(d_{op}, d_{oq}, d_{ot})^P = (d_{op}, d_{oq}, d_{ot}) \in oT_D$
- b) $(d_{ip}, d_{iq}, d_{it})^P = (d_{\pi(i)p}, d_{\pi(i)q}, d_{it}) \in oT_D$
- c) $(d_{ip}, d_{iq}, d_{it})^P = (d_{\pi(i)p}, d_{\pi(i)q}, d_{\pi(i)t}) \in oT_D$
- d) $(d_{ix}, d_{jy}, d_{kz})^P = (d_{\pi(i)x}, d_{\pi(j)y}, d_{\pi(k)z}) \in oT_D$

D. h. alle geordneten Tripel von oS werden auf geordnete Tripel von oS abgebildet, P ist eine Kollineation von oS .

Demnach lassen sich alle Kollineationen von oS_1 auf oS fortsetzen, oS hat eine Gruppe von Kollineationen, die isomorph zu K_1 ist.

Die Kollineationen von oS_2 lassen sich i. a. nicht zu Kollineationen von oS fortsetzen, betrachte z. B. die Π -Ebene als Schnittprodukt des geordneten Steinerschen Tripelsystems der Ordnung 3 mit sich (vgl. II. 19 A 2). Ihre volle Kollineationsgruppe ist isomorph zur Kollineationsgruppe von oS_1 , also zu Z_3 (vgl. III. 4. a) ii).

KAPITEL IV

Algebraische Darstellungen geordneter Steinerscher Tripelsysteme

IV. 1 Definition

Eine Steiner-Loop SL ist eine Loop mit $2(n+1)$ Elementen, so daß gilt:

i) $\exists 1 \in SL$ mit

$$a) \forall x \in SL \setminus \{1, 1\} : x^2 = 1, x \cdot (1x) = (1x) \cdot x = 1 \cdot x^2 = 1$$

$$b) \forall y \in SL : y1 = 1y$$

ii) $\forall x, y \in SL \setminus \{1, 1\}, x \notin \{y, 1y\}$ gilt:

$$xy = z \Rightarrow yz = x \wedge yx = 1z$$

Aus einem geordneten Steinerschen Tripelsystem kann man eine solche Steiner-Loop konstruieren, und auch umgekehrt kann man zu einer Steiner-Loop ein geordnetes Steinersches Tripelsystem konstruieren.

IV. 2 Bemerkung

a) Sei $\sigma S = (A, \sigma T) = (\{a_1, \dots, a_n\}, \sigma T)$ ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n .
Auf A definiere man eine partielle Multiplikation:

$$a_i \cdot a_j = a_k \Leftrightarrow (a_i, a_j, a_k) \in \sigma T$$

Man bilde $SL := \{a_1, \dots, a_n, 1a_1, \dots, 1a_n, 1, 1\}$
und setze diese Multiplikation auf SL fort:

$$x \cdot y = \begin{cases} x & \text{für } y = 1 \\ y & \text{für } x = 1 \\ -1 & \text{für } x = y \in \{a_1, \dots, a_n, la_1, \dots, la_n\} \\ e & \text{für } (x = 1, y = la \in \{la_1, \dots, la_n\}) \vee \\ & (y = 1, x = la \in \{la_1, \dots, la_n\}) \\ 1 & \text{für } (x = y \in \{1, 1\}) \vee (x = ly \in \{a_1, \dots, a_n, la_1, \dots, la_n\}) \\ z & \text{für } (x, y \in A \wedge ((x, y, z) \in oT \vee (x, lz, y) \in oT)) \vee \\ & (x, ly \in A \wedge ((x, lz, ly) \in oTv(x, ly, z) \in oT)) \vee \\ & (y, lx \in A \wedge ((y, lx, lz) \in oTv(lx, y, z) \in oT)) \vee \\ & (ly, lx \in A \wedge ((ly, lx, z) \in oTv(lx, ly, z) \in oT)). \end{cases}$$

SL ist dann bzgl. dieser Multiplikation eine Steiner-Loop mit $|SL| = 2(n+1)$

b) Sei umgekehrt SL eine Steiner-Loop, $|SL| = 2(n+1)$.

Wähle eine n-elementige Teilmenge $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ von SL aus, so daß gilt:

- i) $\forall a_i \in A: a_i^2 = 1 \neq 1$
- ii) $\forall a_i, a_j \in A, a_i \neq a_j : a_i \neq la_j$

Auf A lege man geordnete Tripel fest:

(a_i, a_j, a_k) geordnetes Tripel $\Leftrightarrow a_i \cdot a_j = a_k$

Die Menge aller dieser geordneten Tripel bezeichne man mit oT. Dann ist oS = (A, oT) ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung n.

Zu einer Steiner-Loop kann man i. a. mehrere nicht isomorphe geordnete Steinersche Tripelsysteme konstruieren. Seien z. B. $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ und $A' = \{la_1, \dots, la_n\}$ zwei n-elementige Teilmengen von SL, die die Bedingungen i) und ii) erfüllen.

Die daraus konstruierten geordneten Steinerschen Tripelsysteme $\circ S = (A, \circ T)$ und $\circ S' = (A', \circ T')$ sind i. a. nicht isomorph.

Es soll jetzt noch ein Beispiel für eine Steiner-Loop angegeben werden.

IV. 3 Beispiel

Die übliche Quaternionengruppe $\mathcal{H}$ ist eine Steiner-Loop. Aus ihr läßt sich das geordnete Steinersche Tripelsystem der Ordnung 3 konstruieren und umgekehrt.

Weiterhin kann man Algebren angeben, die in engem Zusammenhang mit geordneten Steinerschen Tripelsystemen stehen.

IV. 4 Definition

Eine Algebra A über einem Körper K der Dimension $(n+1)$ nennt man eine Steiner-Algebra, wenn es eine Basis $B = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ von A gibt, so daß $\{u_0, u_1, \dots, u_n, -u_0, -u_1, \dots, -u_n\}$ eine Steiner-Loop bzgl. der Multiplikation bildet.
(Dabei sei $\circ_{BdA} u_0$ das Einselement von A .)

Es sollen jetzt einige Eigenschaften solcher Steiner-Algebren angegeben werden.

IV. 5 Satz

A sei eine Steiner-Algebra über einem Körper K mit Basis $B = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$, $x = \sum_{i=0}^n x_i u_i$ und $y = \sum_{i=0}^n y_i u_i$ beliebige Elemente von A.

Dann gilt:

1. A ist quadratische Algebra mit

a) Linearform $t : A \rightarrow K$

$$x \mapsto 2 x_0$$

b) quadratischer Form $n : A \rightarrow K$

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n x_i^2$$

c) zu n assoziierter Bilinearform $: A \times A \rightarrow K_n$

$$(x, y) \mapsto 2 \sum_{i=0}^n x_i y_i$$

D. h. für alle $x \in A$ gilt: $x^2 - t(x)x + n(x)u_0 = 0$

2. A ist involutorisch bzgl. der linearen Abbildung

$- : A \rightarrow A$

$$x \mapsto \bar{x} = t(x)u_0 - x$$

d. h. für alle $x, y \in A$ gilt: $\overline{x \cdot y} = \bar{y} \cdot \bar{x}$.

3. A ist flexibel, d. h. für alle $x, y \in A$ gilt:

$$[x, y, x] := (xy)x - x(yx) = 0$$

4. A ist nichtkommutative Jordan-Algebra, d. h. A ist nicht kommutativ, flexibel und für alle

$$x, y \in A \text{ gilt: } (xy)x^2 = x(yx^2).$$

Beweis

1. Zu zeigen ist, daß gilt:

$$a) t(a u_0) = 2a \quad \forall a \in K;$$

$$b) n(a u_0) = a^2 \quad \forall a \in K \text{ und}$$

$$c) x^2 - t(x)x + n(x)u_0 = 0 \quad \forall x \in A.$$

a) und b) sind klar.

c) $\forall x \in A$, $x = \sum_{i=0}^n x_i u_i$ gilt:

$$\begin{aligned} x^2 - t(x)x + n(x)u_0 &= \\ &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i x_j u_i u_j - 2x_0 \sum_{i=0}^n x_i u_i + \sum_{i=0}^n x_i^2 u_0 = \\ &= \sum_{i=0}^n x_i^2 u_i^2 + \sum_{i=1}^n 2x_0 x_i u_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j < i} (x_i x_j - x_j x_i) u_i u_j - 2x_0 \sum_{i=0}^n x_i u_i + \sum_{i=0}^n x_i^2 u_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist A quadratische Algebra.

2. Zu zeigen ist: $\overline{xy} = \overline{y} \cdot \overline{x} \quad \forall x, y \in A$

Für $x = \sum_{i=0}^n x_i u_i \in A$, $y = \sum_{j=0}^n y_j u_j \in A$ gilt:

$$\begin{aligned} \overline{xy} - \overline{y} \cdot \overline{x} &= \\ &= \left(\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i y_i (u_i u_j) \right) - (y_0 u_0 - \sum_{i=1}^n y_i u_i) (x_0 u_0 - \sum_{j=1}^n x_j u_j) \\ &= x_0 y_0 u_0 - \sum_{i=1}^n x_i y_i u_0 - \sum_{i=1}^n (x_0 y_i + x_i y_0) u_i \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} (x_i y_i - x_j y_i) u_i u_j \\ &\quad - x_0 y_0 u_0 + \sum_{i=1}^n (y_0 x_i x_0 y_i) u_i + \sum_{i=1}^n x_i y_i u_0 \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \sum_{j > i} (y_i x_j - y_j x_i) u_i u_j \\ &= 0 \end{aligned}$$

3. Zunächst werden zwei Beziehungen für Elemente der Basis B gezeigt:

$$a) \forall u_i, u_j \in B \text{ gilt: } [u_i, u_j, u_i] = 0$$

$$b) \forall u_i, u_j, u_k \in B \text{ gilt: } [u_i, u_j, u_k] + [u_k, u_j, u_i] = 0$$

a) Es sind die Fallunterscheidungen i) bis v) nötig:

$$i) \quad u_i = u_j = u_0 \\ [u_0, u_0, u_0] = (u_0 u_0) u_0 - u_0 (u_0 u_0) = 0$$

$$ii) \quad u_i = u_0, u_j \neq u_0 \\ [u_0, u_j, u_0] = (u_0 u_i) u_0 - u_0 (u_i u_0) = 0$$

$$iii) \quad u_i \neq u_0, u_j = u_0 \\ [u_i, u_0, u_i] = (u_i u_0) u_i - u_i (u_0 u_i) = 0$$

$$iv) \quad u_i = u_j \neq u_0 \\ [u_i, u_i, u_i] = (u_i u_i) u_i - u_i (u_i u_i) = -u_0 u_i + u_i u_0 = 0$$

$$v) \quad u_0 \neq u_i \neq u_j \neq u_0 \\ [u_i, u_j, u_i] = (u_i u_j) u_i - u_i (u_j u_i) \\ = u_i (u_i u_j) + u_i (u_i u_j) = 0$$

b) o. B. d. A. $i < k$ (für $i = k$ erhält man a)).

Es sind wieder Fallunterscheidungen i) bis v) nötig:

$$i) \quad u_i = u_0 = u_j \\ [u_0, u_0, u_k] + [u_k, u_0, u_0] = \\ = (u_0 u_0) u_k - u_0 (u_0 u_k) + (u_k u_0) u_0 - u_k (u_0 u_0) = 0$$

$$ii) \quad u_i = u_0 \neq u_j \\ [u_0, u_j, u_k] + [u_k, u_j, u_0] = \\ = (u_0 u_j) u_k - u_0 (u_j u_k) + (u_k u_j) u_0 - u_k (u_j u_0) = 0$$

$$iii) \quad u_i \neq u_0 = u_j \\ [u_i, u_0, u_k] + [u_k, u_0, u_i] = \\ = (u_i u_0) u_k - u_i (u_0 u_k) + (u_k u_0) u_i - u_k (u_0 u_i) = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{iv)} \quad u_i &= u_j \# u_o \\
 [u_i, u_i, u_k] + [u_k, u_i, u_i] &= \\
 &= (u_i^2) u_k - u_i (u_i u_k) + (u_k u_i) u_i - u_k (u_i^2) = 0 \\
 \text{v)} \quad u_o &\# u_i \# u_j \# u_o \\
 [u_i, u_j, u_k] + [u_k, u_j, u_i] &= \\
 &= (u_i u_j) u_k - u_i (u_j u_k) + (u_k u_j) u_i - u_k (u_j u_i) = 0
 \end{aligned}$$

Für die Flexibilität von A ist jetzt zu zeigen:

$$\forall x, y \in A \text{ gilt: } [x, y, x] = 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 [x, y, x] &= (xy)x - x(yx) = \\
 &= \left(\left(\sum_{i=0}^n x_i u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n y_j u_j \right) \right) \left(\sum_{k=0}^n x_k u_k \right) \\
 &\quad - \left(\left(\sum_{i=0}^n x_i u_i \right) \left(\sum_{j=0}^n y_j u_j \right) \right) \left(\sum_{k=0}^n x_k u_k \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n x_i y_j x_k ((u_i u_j) u_k) \\
 &\quad - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n x_i y_j x_k (u_i (u_j u_k)) \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^n x_i y_j x_k [u_i, u_j, u_k] \\
 &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n x_i^2 y_j [u_i, u_j, u_i] \\
 &\quad + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \sum_{k>i}^n x_i y_j x_k ([u_i, u_j, u_k] + [u_k, u_j, u_i]) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Also ist A flexibel.

4. Es ist nur noch zu zeigen, daß für $x, y \in A$ gilt:

$$(xy)x^2 = x(yx^2).$$

Unter Beachtung von $x^2 = t(x)x - n(x) u_o$ für alle $x \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}
& (xy)x^2 - x(yx^2) = \\
& = (xy)(t(x)x - n(x)u_0) - x(y(t(x)x - n(x)u_0)) \\
& = t(x)((xy)x) - n(x)(xy) - t(x)(x(yx) + n(x)(xy)) \\
& = t(x)[x, y, x] = 0
\end{aligned}$$

Also ist A nicht kommutative Jordan-Algebra.

Außerdem kann man zu einer Steiner-Algebra - wie zu jeder quadratischen Algebra - eine Vektoralgebra konstruieren.

IV. 6 Bemerkungen

1. S sei eine Steiner-Algebra über einem Körper K mit Basis $B = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ und Multiplikation $\cdot$. Dann kann man zu A folgendermaßen eine Vektoralgebra U mit Multiplikation $\times$ konstruieren:

$$a) U = \langle u_1, u_2, \dots, u_n \rangle_K$$

$$b) \text{ Für } v = \sum_{i=1}^n v_i u_i \text{ und } w = \sum_{j=1}^n w_j u_j \text{ definiere:}$$

$$v \times w := v \cdot w + \sum_{i=1}^n v_i w_i u_0$$

U ist antikommutative Vektoralgebra über K mit Basis $B_U = \{u_1, \dots, u_n\}$ und Multiplikation $\times$.

Seien $x, y, z \in B_U$. Dann gilt

$$x \cdot y = z \Rightarrow y \cdot z = x \quad (\otimes)$$

2. Eine antikommutative Vektoralgebra U über einem Körper K, die eine Basis B_U hat, die die Eigenschaft $(\otimes)$ besitzt, nennt man Steiner-Vektoralgebra. Zu U kann man wieder eine Steiner-Algebra konstruieren:

U habe die Basis $B_u = \{u_1, \dots, u_n\}$ und die Multiplikation $\times$.

a) Für $u_0 \notin U$ bilde $A = Ku_0 + U$ als Vektorraum.

b) Für $a = a_0 u_0 + \tilde{a} = a_0 u_0 + \sum_{i=1}^n a_i u_i \in A$ und

$b = b_0 u_0 + \tilde{b} = b_0 u_0 + \sum_{i=1}^n b_i u_i \in A$ definiere

$$a \cdot b := a_0 \cdot b + b_0 \cdot a - \sum_{i=1}^n a_i b_i u_0 + \tilde{a} \times \tilde{b}.$$

A ist dann Steiner-Algebra über K mit Basis $B_A = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$ und Multiplikation $\cdot$.

Es soll jetzt ein bekanntes Beispiel einer Steiner-Algebra angegeben werden.

IV. 7 Beispiel

Der Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ mit Basis $B = \{1, i, j, k\}$ ist eine Steiner-Algebra der Dimension 4 über $\mathbb{R}$. In $\mathbb{H}$ gelten außer den allgemeinen Beziehungen für Steiner-Algebren folgende weitere Beziehungen:

- a) $\mathbb{H}$ ist assoziativ.
- b) $\mathbb{H}$ ist nullteilerfrei, also Divisionsalgebra.
- c) Für die quadratische Form n von $\mathbb{H}$ gilt:
 $n(a \cdot b) = n(a) \cdot n(b)$ für alle $a, b \in \mathbb{H}$.

Es gibt genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung 3, also ist $\mathbb{H}$ die einzige Steiner-Algebra der Dimension 4 über $\mathbb{R}$.

Nun werden zwei Möglichkeiten dargestellt, wie man die Dimension von Steiner-Algebren bzw. Steiner-Vektoralgebren vergrößern kann und zwar zunächst die Verdopplung der Dimension einer Steiner-Algebra und dann die Verdreifachung der Dimension einer Steinervektoralgebra.

Für die Verdopplung der Dimension einer Steiner-Algebra erhält man:

IV. 8 Satz

Sei A eine Steiner-Algebra über dem Körper K mit Basis $B = \{u_0, u_1, \dots, u_n\}$.

Auf A wende man den Cayley-Dickson Prozeß an, d. h.

Sei $\mu = (1, 0)$, $\nu = (0, 1)$

Bilde $A^* := \mu A + \nu A$ als direkte Summe und definiere wie üblich für $a_1, a_2, b_1, b_2 \in A$, $k \in K$:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$k(a_1, a_2) := (ka_1, ka_2).$$

Außerdem definiere auf A^* eine Multiplikation:

$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) := (a_1 b_1 - b_2 \bar{a}_2, \bar{a}_1 b_2 + b_1 a_2).$$

A^* ist dann Steiner-Algebra über K mit Basis

$$B^* = \{\mu u_0, \mu u_1, \dots, \mu u_n, \nu u_0, \nu u_1, \dots, \nu u_n\}.$$

Identifiziere jetzt A mit μA , bezeichne $j := \nu u_0$.

Dann ist $\nu u_i = j \cdot \mu u_i$ und damit $A^* = A + jA$.

Die Multiplikation stellt sich dann wie folgt dar:

$$(a_1 + ja_2) \cdot (b_1 + jb_2) = (a_1 b_1 - b_2 \overline{a_2}) + j(\overline{a_1} b_2 + b_1 a_2) \\ a_1, a_2, b_1, b_2 \in A.$$

Für B^* gilt damit:

$$B^* = \{ u_0, u_1, \dots, u_n, j, ju_1, \dots, ju_n \} \text{ mit} \\ u_i \cdot u_k = (u_i u_k) \quad (\text{wie in } B) \\ u_i \cdot ju_i = j \\ u_i \cdot ju_k = j (u_k u_i) \quad i = 1, \dots, n, k = 1, \dots, n, i \neq k \\ ju_i \cdot ju_k = u_k u_i$$

Man erkennt, daß dieser Verdopplungsprozeß einer Steiner-Algebra der Cayleyerweiterung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems entspricht (vgl. II. 4); bezeichne ihn ebenfalls mit Cayleyerweiterung.

Es soll jetzt ein Beispiel der Cayleyerweiterung einer Steiner-Algebra angegeben werden.

IV. 9 Beispiel

IH sei der Quaternionenschiefkörper (vgl. Beispiel IV. 7). Seine Basis B sei gegeben durch $B = \{ u_0, u_1, u_2, u_3 \}$, wobei u_0 das Einselement der Multiplikation bezeichnet und $u_1 u_2 = u_3$ ist. Mit der Cayleyerweiterung erhält man als Basis B^* der Verdopplungsalgebra A^* :

$$B^* = \{ u_0, u_1, u_2, u_3, j, ju_1, ju_2, ju_3 \} \\ \text{setze nun } j := u_4 \text{ und } ju_i = u_{i+4} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \text{Dann ist } B^* = \{ u_0, u_1, \dots, u_7 \} \text{ und man erhält}$$

folgende Multiplikationstafel:

$\cdot$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_0	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	u_1	$-u_0$	u_3	$-u_2$	$-u_5$	u_4	$-u_7$	u_6
u_2	u_2	$-u_3$	$-u_0$	u_1	$-u_6$	u_7	u_4	$-u_5$
u_3	u_3	u_2	$-u_1$	$-u_0$	$-u_7$	$-u_6$	u_5	u_4
u_4	u_4	u_5	u_6	u_7	$-u_0$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$
u_5	u_5	$-u_4$	$-u_7$	u_6	u_1	$-u_0$	$-u_3$	u_2
u_6	u_6	u_7	$-u_4$	$-u_5$	u_2	u_3	$-u_0$	$-u_1$
u_7	u_7	$-u_6$	u_5	$-u_4$	u_3	$-u_2$	u_1	$-u_0$

A^* ist die Cayleysche Okta-ven-Algebra $\mathcal{O}$ (vgl. [6]).

In $\mathcal{O}$ gelten zusätzlich zu den allgemeinen Beziehungen von Steiner-Algebren folgende weitere Beziehungen:

- a) $\mathcal{O}$ ist alternativ, d. h. für $a, b \in \mathcal{O}$ gilt:
 $a^2b = a(ab)$ und $ba^2 = (ba)a$
- b) $\mathcal{O}$ ist nullteilerfrei, d. h. Divisionsalgebra über $\mathbb{R}$.
- c) Für die quadratische Form n von $\mathcal{O}$ gilt:
 $n(ab) = n(a) n(b)$ für alle $a, b \in \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ läßt sich als geordnetes Steinersches Tripelsystem die Cayleyebene C zuordnen, die durch Cayleyerweiterung aus dem geordneten Steinerschen Tripelsystem der Ordnung 3 entstanden ist.

Nun soll eine Möglichkeit der Verdreifachung einer Steiner-Vektoralgebra angegeben werden. Dazu muß zunächst eine zweite Multiplikation auf der Steiner-Vektoralgebra definiert werden.

IV. 10 Hilfssatz

U sei eine Steiner-Vektoralgebra über dem Körper K mit Basis $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ und der Multiplikation x . Definiere auf U eine Multiplikation $*$ durch

$$v * w := vxw + \sum_{i=1}^n v_i w_i u_i$$

$$\text{wobei } v = \sum_{i=1}^n v_i u_i \in U \text{ und } w = \sum_{i=1}^n w_i u_i \in U$$

Für je zwei Basiselemente $u_i, u_j \in B$ gilt dann:

$$u_i * u_j = \begin{cases} u_i \times u_j & i \neq j \\ u_i & \text{für } i = j \end{cases}$$

U ist mit der Multiplikation $*$ wieder eine Algebra.

Unter Verwendung dieser Multiplikation $*$ kann man jetzt eine Steiner-Vektoralgebra verdreifachen.

IV. 11 Satz

U sei eine Steiner-Vektoralgebra über dem Körper K mit der Multiplikation $\times$ und Basis $B = \{u_1, \dots, u_n\}$. Auf U sei die Multiplikation $*$ wie in Hilfssatz IV. 10 definiert.

Sei weiter $\lambda = (1, 0, 0)$, $\mu = (0, 1, 0)$ und $\nu = (0, 0, 1)$. Bilde $U^* = \lambda U + \mu U + \nu U$ als direkte Vektorraumsumme. Auf U^* definiere für $v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_3 \in U$, $k \in K$:

a) eine Addition $+$ durch

$$(v_1, v_2, v_3) + (w_1, w_2, w_3) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

b) eine äußere Multiplikation $\cdot$ durch

$$k \cdot (v_1, v_2, v_3) := (kv_1, kv_2, kv_3)$$

U^* ist dann ein Vektorraum über K der Dimension $3n$.

Definiere weiter in U^* eine Multiplikation $\times$ durch

$$\begin{aligned} (v_1, v_2, v_3) \times (w_1, w_2, w_3) &:= \\ &= (v_1 \times w_1 + v_2 * w_3 - w_2 * v_3, \\ &\quad v_2 \times w_2 + v_3 * w_1 - w_3 * v_1, \\ &\quad v_3 \times w_3 + v_1 * w_2 - w_1 * v_2) \end{aligned}$$

Mit dieser Multiplikation existiert U^* eine Steiner-Vektoralgebra der Dimension $3n$ über K mit Basis $B^* = \{\lambda u_1, \dots, \lambda u_n, \mu u_1, \dots, \mu u_n, \nu u_1, \dots, \nu u_n\}$.

Es soll nun ein Beispiel für die Verdreifachung einer Steiner-Vektoralgebra angegeben werden.

IV. 15 Beispiel

U sei eine dreidimensionale Steiner Vektoralgebra über $\mathbb{R}$ mit Basis $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ und der Multiplikation x , festgelegt durch $u_1 \times u_2 = u_3$, d. h. die zum Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$ gehörende Vektoralgebra.

Nach Anwendung des Verdreifachungsprozesses erhält man als Basis B^* der Verdreifachungsalgebra U^* :

$$B^* = \{ \lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3, \mu u_1, \mu u_2, \mu u_3, \nu u_1, \nu u_2, \nu u_3 \}$$

Setze nun: $u_i := \lambda u_i$, $u_{i+3} := \mu u_i$, $u_{i+6} := \nu u_i$ ($i=1,2,3$)
Es ist dann $B^* = \{ u_1, \dots, u_9 \}$ und man erhält folgende Multiplikationstafel:

x	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
u_1	0	u_3	$-u_2$	u_7	u_9	$-u_8$	$-u_4$	u_6	$-u_5$
u_2	$-u_3$	0	u_1	$-u_9$	u_8	u_7	$-u_6$	$-u_5$	u_4
u_3	u_2	$-u_1$	0	u_8	$-u_7$	u_9	u_5	$-u_4$	$-u_6$
u_4	$-u_7$	u_9	$-u_8$	0	u_6	$-u_5$	u_1	u_3	$-u_2$
u_5	$-u_9$	$-u_8$	u_7	$-u_6$	0	u_4	$-u_3$	u_2	u_1
u_6	u_8	$-u_7$	$-u_9$	u_5	$-u_4$	0	u_2	$-u_1$	u_3
u_7	u_4	u_6	$-u_5$	$-u_1$	u_3	$-u_2$	0	u_9	$-u_8$
u_8	$-u_6$	u_5	u_4	$-u_3$	$-u_2$	u_1	$-u_9$	0	u_7
u_9	u_5	$-u_4$	u_6	u_2	u_1	$-u_3$	u_8	$-u_7$	0

Bezeichne diese Steiner-Vektoralgebra als Neuner-algebra N . Man erkennt, daß der Neuner-algebra als geordnetes Steinersches Tripelsystem die Neunerebene N zugrunde liegt.

Abschließend soll noch ein weiteres Beispiel für eine Steiner-Algebra angegeben werden und zwar die Steiner-Algebra, deren zugehöriges geordnetes Steinersches Tripelsystem die Π -Ebene ist.

IV. 16 Beispiel

P sei eine achtdimensionale Steiner-Algebra über mit Basis $B = \{u_0, u_1, \dots, u_7\}$ und folgender Multiplikationstafel:

$\cdot$	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_0	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7
u_1	u_1	$-u_0$	$-u_3$	u_2	$-u_5$	u_4	$-u_7$	u_6
u_2	u_2	u_3	$-u_0$	$-u_1$	$-u_6$	u_7	u_4	$-u_5$
u_3	u_3	$-u_2$	u_1	$-u_0$	$-u_7$	$-u_6$	u_5	u_4
u_4	u_4	u_5	u_6	u_7	$-u_6$	$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$
u_5	u_5	$-u_4$	$-u_7$	u_6	u_1	$-u_0$	$-u_3$	u_2
u_6	u_6	u_7	$-u_4$	$-u_5$	u_2	u_3	$-u_0$	$-u_1$
u_7	u_7	$-u_6$	u_5	$-u_4$	u_3	$-u_2$	u_1	$-u_0$

Diese Algebra P ist nicht alternativ und nicht nullteilerfrei, also nicht isomorph zur Cayleyschen Oktavenalgebra (Beispiel IV. 9). P liegt als geordnetes Steinersches Tripelsystem die Π -Ebene zugrunde.

i) Gegenbeispiel zur Alternativität:

Sei $a = u_1 + u_5 \in P$ und $b = u_2 \in P$

Dann ist

$$a^2 b = (u_1 + u_5)^2 u_2 = -2u_2$$

$$a(ab) = (u_1 + u_5) ((u_1 + u_5)u_2) = -2u_2 - 2u_6$$

D. h. $a^2 b \neq a(ab)$, also ist ein Alternativgesetz verletzt.

ii) Beispiel für Nullteiler:

Sei $a = (u_1 - u_5) \in P$ und $b = (u_2 + u_6) \in P$

Dann ist

$$a b = (u_1 - u_5) (u_2 + u_6) = 0$$

D. h. a und b sind Nullteiler.

Es gibt also mindestens zwei verschiedene achtdimensionale Steiner-Algebren über $\mathbb{R}$.

In Kapitel V wird gezeigt werden, daß es genau zwei algebraisch verschiedene geordnete Steinersche Tripelsysteme der Ordnung 7 gibt, d. h. auch die Steiner-Algebren O und P sind alle achtdimensionalen Algebren über $\mathbb{R}$. Genauso gibt es genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem der Ordnung 9, d. h. die Neuneralgebra N (IV. 15) bzw. ihre zugehörige Steiner-Algebra ist die einzige neundimensionale Steiner-Vektoralgebra bzw. zehndimensionale Steiner-Algebra über $\mathbb{R}$.

KAPITEL V

Klassifikation geordneter Steinerscher Tripelsysteme

In diesem Kapitel soll untersucht werden, welche Möglichkeiten bestehen, zu einem festen gegebenen Steinerschen Tripelsystem geordnete Steinersche Tripelsysteme zu konstruieren. Dabei wird der algebraische Aspekt betont, d. h. geordnete Steinersche Tripelsysteme, die zu gleichen Steiner-Loops führen, werden nicht unterschieden.

V. 1 Definition

Zwei geordnete Steinersche Tripelsysteme heißen äquivalent-isomorph, wenn sie sich zu isomorphen Steiner-Loops ergänzen lassen.

Man erkennt, daß zwei äquivalent-isomorphe Steinersche Tripelsysteme nicht unbedingt isomorph sind. Wie schon in IV. 2 b bemerkt wurde, kann man aus einer festen Steiner-Loop i. a. mehrere nicht isomorphe geordnete Steinersche Tripelsysteme konstruieren, die natürlich umgekehrt wieder zu isomorphen Steiner-Loops ergänzt werden können, also äquivalent-isomorph sind.

V. 2 Bemerkung

- a) Sei $S = (A, T)$ ein Steinersches Tripelsystem, φ eine seiner Kollineationen. Sei weiter $oS = (A, oT)$ ein aus S konstruiertes geordnetes Steinersches Tripelsystem. Da φ Kollineation von S ist, gilt für alle Tripel $t \in T$: $t^\varphi \in T$.

Definiere eine Menge oT' geordneter Tripel:

$$(a, b, c) \in \text{oT} \Leftrightarrow (a^\varphi, b^\varphi, c^\varphi) \in \text{oT}'$$

Dann ist $\text{oS}' = (A, \text{oT}')$ ein zu oS isomorphes geordnetes Steinersches Tripelsystem.

Seien umgekehrt oS und oS' zwei isomorphe geordnete Steinersche Tripelsysteme, die aus einem Steinerschen Tripelsystem S konstruiert wurden.

Dann kann man oS und oS' durch eine Kollineation von S aufeinander abbilden.

- b) Sei SL eine Steiner-Loop, $\text{oS} = (A, \text{oT})$ ein daraus konstruiertes geordnetes Steinersches Tripelsystem. Bezeichne für $a \in A : a^2 = : 1 \in SL$. Es sei $A = \{ a_1, \dots, a_n \}$.

Dann kann man aus SL auch über die Menge $A' =$

$$\{ a_1', a_2', \dots, a_n' \} = \{ 1a_1, a_2, \dots, a_n \}$$

ein geordnetes Steinersches Tripelsystem oS' konstruieren

Dieses unterscheidet sich von oS dadurch, daß die zyklische Anordnung aller geordneter Tripel durch a_1 umgekehrt wurde. Das bedeutet andererseits, daß zwei geordnete Steinersche Tripelsysteme, die sich nur dadurch unterscheiden, daß bei einem alle Tripel durch einen Punkt umgeordnet wurden, zu isomorphen Steiner-Loops führen.

Man bezeichnet eine Abbildung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems, die sukzessive an mehreren Punkten jeweils alle Tripel durch einen Punkt umordnet als Äquivalenzabbildung des geordneten Steinerschen Tripelsystems.

Daraus erhält man sofort:

V. 3 Satz

Zwei geordnete Steinersche Tripelsysteme sind genau dann äquivalent-isomorph, wenn sie durch Isomorphismen und Äquivalenzabbildungen ineinander überführt werden können.

Beweis:

Beide Abbildungen führen zu geordneten Steinerschen Tripelsystemen, aus denen sich isomorphe Steiner-Loops konstruieren lassen und umgekehrt führen die einzigen Möglichkeiten aus isomorphen Steiner-Loops geordnete Steinersche Tripelsysteme zu konstruieren zu solchen, die sich auf diese Art aufeinander abbilden lassen.

In einem gegebenen Steinerschen Tripelsystem S kann man zu jedem Tripel zwei verschiedene zyklische Anordnungen der Punkte festlegen. Wenn man einer dieser beiden Anordnungen 0 und der anderen 1 zuordnet, kann man eine Umordnung als Addition mit 1 in $GF(2)$ auffassen. Auf diese Weise kann man zu S einen Ordnungsraum $O = GF(2)^b$ definieren, wobei b die Anzahl der Tripel von S ist.

V. 4 Definition

S sei ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n mit b Tripeln. Es gibt dann 2^b Möglichkeiten, auf den

Tripeln von S zyklische Anordnungen festzulegen, d. h. 2^b aus S gebildete geordnete Steinersche Tripelsysteme. Einem fest gewählten geordneten Steinerschen Tripelsystem, dem sogenannten Nullsystem, ordnet man den Nullvektor des $GF(2)^b$ zu. Dann kann man jedes zu S gehörige geordnete Steinersche Tripelsystem als Vektor des $GF(2)^b$ auffassen. Dabei bedeutet 0 an der m -ten Stelle, daß das m -te Tripel die gleiche zyklische Anordnung trägt wie das m -te Tripel des Nullsystems, 1 an der m -ten Stelle bedeutet, daß das m -te Tripel die umgekehrte zyklische Anordnung trägt wie das m -te Tripel des Nullsystems. In diesem Sinn nennt man $GF(2)^b$ den Ordnungsraum O des Steinerschen Tripelsystems bezüglich des Nullsystems.

Äquivalenzabbildungen und Isomorphismen geordneter Steinerscher Tripelsysteme lassen sich als Abbildungen des zugehörigen Ordnungsraumes O auffassen:

V. 5 Bemerkung

Man kann Isomorphismen und Äquivalenzabbildungen eines geordneten Steinerschen Tripelsystems folgendermaßen als Abbildungen der Vektoren des Ordnungsraumes O darstellen:

a) Äquivalenzabbildungen

Eine Äquivalenzabbildung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems αS mit zugehörigem Ordnungsvektor $\underline{y} \in O$ bildet jedes Tripel auf sich ab, wobei sich lediglich bei manchen geordneten Tripeln die zyklische Anordnung umkehrt.

Im Ordnungsraum O bedeutet das:

$$\underline{v}^\psi = \underline{v} + \underline{t}$$

Dabei ist $\underline{t} = (t_1, \dots, t_b)$ ein Vektor des $GF(2)^b$

mit

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{falls die Anordnung des } i\text{-ten geordneten Tripels erhalten bleibt} \\ 1 & \text{falls die Anordnung des } i\text{-ten geordneten Tripels umgekehrt wird.} \end{cases}$$

$\underline{t}$ ist unabhängig vom Nullsystem.

b) Isomorphismen

Ein Isomorphismus φ eines geordneten Steinerschen Tripelsystems oS mit zugehörigem Ordnungsvektor $\underline{v} \in O$ ist eine Kollineation des zugehörigen Steinerschen Tripelsystems S . φ bildet jedes Tripel wieder auf ein Tripel ab. Dabei wird in manchem Tripel die zyklische Anordnung umgekehrt, je nachdem wie die Punkte der Tripel abgebildet werden und abhängig von der Ordnung des Bildtripels im Nullsystem. Im Ordnungsraum O bedeutet das:

$$\underline{v}^\varphi = A \underline{v} + \underline{k}.$$

Dabei ist $A = (a_{ij})$ eine $b \times b$ Matrix über $GF(2)$, die in jeder Spalte und Zeile genau eine 1 enthält, ($a_{op} = 1 \iff$ das o -te Tripel wird auf das p -te Tripel abgebildet) $\underline{k} \in GF(2)^b$ ein Korrekturvektor, der angibt, welche geordneten Tripel bei der Abbildung ihre zyklische Anordnung umkehren.

A ist unabhängig vom Nullsystem, $\underline{k}$ ist abhängig vom Nullsystem.

Die Matrix A und der Korrekturvektor $\underline{k}$ eines Isomorphismus des geordneten Steinerschen Tripelsystems im Ordnungsraum O sind durch diesen und die Festlegung des Nullsystems eindeutig bestimmt. Es ist noch zu klären, welche Vektoren des $GF(2)^b$ als Translationsvektoren einer Äquivalenzabbildung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems auftreten können.

V. 6 Lemma

σS sei ein geordnetes Steinersches Tripelsystem mit Ordnungsvektor $\underline{v}$, T der von den Inzidenzvektoren des zugehörigen Steinerschen Tripelsystems erzeugte Unterraum des $GF(2)^b$, Ψ die Gruppe der Äquivalenzabbildungen von σS . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{i) } \psi \in \Psi &: \underline{v}^\psi = \underline{v} + \underline{t} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{t} \in T \\ \text{ii) } |\Psi| &= 2^{rg_2 S} \end{aligned}$$

Beweis:

- i) Eine Äquivalenzabbildung eines geordneten Steinerschen Tripelsystems ist eine Abbildung, bei der sukzessive alle Tripel durch einen Punkt oder mehrere Punkte umgeordnet werden. Das bedeutet im Ordnungsraum, daß die diesen Tripeln zugeordnete Anordnung (1 oder 0) mit 1 addiert wird. Die Inzidenzvektoren geben genau die Tripel durch einen Punkt an, d. h. die Additionen eines Ordnungsvektors mit Inzidenzvektoren stellen genau die Äquivalenzabbildungen dar.

- ii) Nach i) gilt zunächst: $|\Psi| = |T|$
 T Unterraum des $GF(2)^b$, d. h. $|T| = 2^{\dim T}$
 Die Dimension von T ist aber gleich dem Rang
 der Inzidenzmatrix über $GF(2)$, d. h. nach I. 8
 $T = 2^{rE_2^S}$.
 Also gilt: $|\Psi| = 2^{rE_2^S}$.

Nach dem vorangegangenen ist klar, daß die Gruppe aller Abbildungen, die ein geordnetes Steinersches Tripelsystem auf ein äquivalent-isomorphes zu dem gleichen Steinerschen Tripelsystem gehörendes abbildet, erzeugt wird von den Isomorphismen, die aus den Kollineationen des zugehörigen Steinerschen Tripelsystems entstehen, und den Äquivalenzabbildungen des geordneten Steinerschen Tripelsystems.

Es gilt sogar:

V. 7 Satz

O sei der Orientierungsraum eines Steinerschen Tripelsystems S bezüglich eines festen geordneten Steinerschen Tripelsystems. nS als Nullsystem, Φ sei die Gruppe von Isomorphismen, die von den Kollineationen von S induziert wird, Ψ die Gruppe der Äquivalenzabbildungen und T der von den Inzidenzvektoren erzeugte Unterraum des $GF(2)^b$.

Dann ist die von Φ und Ψ erzeugte Gruppe Ω aller Äquivalenz-Isomorphismen semidirektes Produkt von Φ und Ψ mit $\Psi \triangleleft \Omega$.

Beweis:

Zu zeigen ist:

- i) $\Psi \trianglelefteq \Omega$
- ii) $\Psi \cap \Phi = \{\text{id}\}$
- iii) $\Omega = \Phi \cdot \Psi$

i) Seien $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \Psi$ beliebig.

für $\underline{v} \in O$ gelte: $\underline{v}^\varphi = A \underline{v} + \underline{k}$, $\underline{v}^\psi = \underline{v} + \underline{t}$.
 Dann ist $\underline{v}^{\psi\varphi} = \underline{v}^{\varphi^{-1}\psi} = (A\underline{v} + \underline{k})^{\varphi^{-1}\psi} = (A\underline{v} + \underline{k} + \underline{t})^{\varphi^{-1}}$
 $= A^{-1}A\underline{v} + A^{-1}\underline{k} + A^{-1}\underline{t} + A^{-1}\underline{k} = \underline{v} + A^{-1}\underline{t}$

Da A^{-1} von einer Kollineation des Steinerschen Tripelsystems bestimmt ist und $\underline{t} \in T$, liegt auch $A^{-1}\underline{t}$ in T .

Also ist $\underline{v}^{\psi\varphi} = \underline{v}^{\psi'}$ mit $\psi' \in \Psi$ und damit $\Psi \trianglelefteq \Omega$.

- ii) Sei $\varphi \in \Psi \cap \Phi$. Dann gibt es ein $t \in T$,
 so daß für $\underline{v} \in O$ gilt: $\underline{v}^\varphi = \underline{v} + \underline{t}$, da $\varphi \in \Psi$.
 Jeder Isomorphismus, der von einer Kollineation
 des Steinerschen Tripelsystems S induziert wird
 und alle Tripel von S auf sich abbildet, ist die
 Identität von S , d. h. $\underline{v}^\varphi = \underline{v}$, da $\varphi \in \Phi$.
 Also ist $\Phi \cap \Psi = \{\text{id}\}$.

- iii) Ω wird von Φ und Ψ erzeugt, und Ψ ist Normal-
 teiler von Ω . Es folgt sofort:
 $\Omega = \Phi \cdot \Psi$

Demnach ist Ω semidirektes Produkt von Φ und Ψ ,
 wobei Ψ Normalteiler von Ω ist.

Mit Hilfe der Gruppe Ω der Äquivalenz-Isomorphismen kann man jetzt die verschiedenen, d. h. nicht äquivalent-isomorphen geordneten Steinerschen Tripelsysteme bestimmen, die man aus einem festen Steinerschen Tripelsystem konstruieren kann.

V. 8 Klassifizierung der zu einem Steinerschen Tripelsystem gehörenden geordneten Steinerschen Tripelsysteme

S sei ein Steinersches Tripelsystem, nS ein daraus konstruiertes geordnetes Steinersches Tripelsystem, O sein Ordnungsraum bezüglich nS und Ω die Gruppe der zugehörigen Äquivalenz-Isomorphismen. Unter der Wirkung von Ω zerfällt der Ordnungsraum O in Bahnen, die sogenannten Äquivalenz-Isomorphieklassen. Diese stellen die verschiedenen, d. h. nicht äquivalent-isomorphen geordneten Steinerschen Tripelsysteme dar, die man aus S konstruieren kann. Zu jeder Äquivalenz-Isomorphieklasse kann man (bis auf Isomorphie) genau eine Steiner-Loop konstruieren, zu verschiedenen Äquivalenz-Isomorphieklassen erhält man auch verschiedene (nicht isomorphe) Steiner-Loops.

Aus V. 8 erhält man sofort:

V. 9 Folgerung

S sei ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n , K seine volle Kollineationsgruppe, $|K| = 1$, und dp

die projektive Dimension von S . Dann gibt es mindestens m verschiedene geordnete Steinersche Tripelsysteme zu S mit

$$m = 1^{-1} \cdot 2^{\frac{n(n-7)}{6} + dp + 1}$$

Beweis:

S hat die Ordnung n , also $b = \frac{n(n-1)}{6}$ Tripel.

O sei der zu S gehörende Orientierungsraum, d. h.

$$|O| = |GF(2)^b| = 2^{\frac{n(n-1)}{6}}.$$

Ω sei die Gruppe der Äquivalenz-Isomorphismen von S . Dann ist nach V. 7 $\Omega = \Phi \rtimes \Psi$, wobei Φ die Gruppe der von K induzierten Isomorphismen und Ψ die Gruppe der Äquivalenzabbildungen ist.

Nach Voraussetzung ist $|\Phi| = |K| = 1$

und nach V. 7 $|\Psi| = 2^{rg_2 S}$

Also ist $|\Omega| = 1 \cdot 2^{rg_2 S}$

Jede Äquivalenz-Isomorphieklasse enthält höchstens $|\Omega|$ Elemente, also gibt es mindestens $m = \frac{|O|}{|\Omega|}$ verschiedene Äquivalenzklassen, d. h. aber auch m verschiedene geordnete Steinersche Tripelsysteme zu S . Also ist

$$m = \frac{|O|}{|\Omega|} = \frac{2^{\frac{n(n-1)}{6}}}{2^{rg_2 S} \cdot 1} = 1^{-1} \cdot 2^{\frac{n(n-7)}{6} + dp + 1}.$$

Für einige Steinersche Tripelsysteme kleiner Ordnungen soll die Klassifizierung jetzt explizit durchgeführt werden.

V. 10 Beispiele

1. S sei die projektive Ebene über $GF(2)$, d. h. das Steinersche Tripelsystem der Ordnung 7. Die Kollineationsgruppe von S ist die $PGL(3,2)$ mit $|PGL(3,2)| = 168$. Die projektive Dimension dp von S ist $dp = 2$, die Ordnung der Gruppe Ψ der Äquivalenzabbildungen ist also $|\Psi| = 2^4 = 16$. Daraus ergibt sich die Ordnung der Gruppe Ω der Äquivalenzisomorphismen zu $|\Omega| = |PGL(3,2)| = 168$
 $= 2^7 \cdot 3 \cdot 7 = 2688$.

S sei wie in III. 4 a) festgelegt.
 Seine Inzidenzmatrix M lautet dann:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Der Unterraum T von $GF(2)^7$, der von den Inzidenzvektoren erzeugt wird, hat die Dimension 4:
 $T = \langle (1011000), (1000011), (1100100), (0010101) \rangle$

Die Cayleyebene C (wie in III. 4 a)) sei das Nullsystem des Ordnungsraumes $O = GF(2)^7$ von S.
 O zerfällt unter der Wirkung von Ψ in 8 Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned}
\ddot{A}_1 &= (0000000) + T \\
\ddot{A}_2 &= (1000000) + T \\
\ddot{A}_3 &= (0100000) + T \\
\ddot{A}_4 &= (0010000) + T \\
\ddot{A}_5 &= (0001000) + T \\
\ddot{A}_6 &= (0000100) + T \\
\ddot{A}_7 &= (0000010) + T \\
\ddot{A}_8 &= (0000001) + T
\end{aligned}$$

Sei jetzt $\eta := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{PGL}(3, 2)$. η bildet die Vektoren des Ordnungsraumes O folgendermaßen ab:

$$\eta : \begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & 0 \\ \underline{v} & \longmapsto & A_\eta \cdot \underline{v} \end{array} \quad \text{mit}$$

$$A_\eta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sei $B := \langle \Psi, \eta \rangle$. Dann ist $B \leq \Omega$ und O zerfällt unter der Wirkung von B in 2 Bahnen:

$$B_1 = \ddot{A}_1$$

$$B_2 = \ddot{A}_2 \cup \ddot{A}_3 \cup \ddot{A}_4 \cup \ddot{A}_5 \cup \ddot{A}_6 \cup \ddot{A}_7 \cup \ddot{A}_8$$

Also zerfällt O unter der Wirkung von Ω in höchstens 2 Äquivalenz-Isomorphieklassen (*).

Sei $\varphi := \begin{pmatrix} 010 \\ 100 \\ 111 \end{pmatrix} \in \text{PGL}(3,2)$. φ bildet die Vektoren von O folgendermaßen ab:

$$\psi : \begin{array}{l} O \longrightarrow O \\ \underline{v} \longmapsto A_\varphi \underline{v} + \underline{k} \end{array} \quad \text{mit}$$

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{k} = (0011011)$$

Sei weiter $\psi \in \Psi$, die die Vektoren von O so abbildet:

$$\psi : \begin{array}{l} O \longrightarrow O \\ \underline{v} \longmapsto \underline{v} + \underline{t} \end{array} \quad \text{mit } \underline{t} = (0011011) \in T$$

Die Abbildung $\psi \cdot \varphi \in \Omega$ sieht dann so aus:

$$\psi \cdot \varphi : \begin{array}{l} O \longrightarrow O \\ \underline{v} \longmapsto A_\varphi \underline{v} \end{array}$$

Der Nullvektor $\underline{0} = (0000000) \in O$ wird durch $\psi \cdot \varphi$ auf sich abgebildet.

Sei U_1 wie in III. 4 a) die Kollineationsgruppe der Cayleyebene C . In O entspricht der Cayleyebene der Nullvektor, d. h. U_1 bildet $\underline{0}$ wieder auf sich ab.

Sei jetzt $X = \langle U_1, \psi \cdot \varphi \rangle$

Dann liegt X im Stabilisator des Nullvektors und $|X| = 42$.

Die Äquivalenz-Isomorphieklasse, in der der Nullvektor liegt, enthält damit höchstens 2^6 Vektoren. Der Ordnungsraum O besteht aber aus 2^7 Vektoren, es muß mindestens noch eine zweite Äquivalenz-Isomorphieklasse geben. (**)

Aus (*) und (**) folgt sofort:

Es gibt genau zwei Äquivalenz-Isomorphieklassen in O , nämlich B_1 und B_2 . Also gibt es auch genau zwei verschiedene geordnete Steinersche Tripelsysteme zur projektiven Ebene über $GF(2)$. Diese sind die Cayleyebene C und die Π -Ebene Π .

2. S sei die affine Ebene über $GF(3)$, d. h. das Steinersche Tripelsystem der Ordnung 9. Die Kollineationsgruppe von S bezeichne mit K . Dann ist $|K| = 432$.

Die projektive Dimension dp von S ist $dp = -1$, die Ordnung der Gruppe Ψ der Äquivalenzabbildungen ist also $|\Psi| = 2^9$. Daraus ergibt sich die Ordnung der Gruppe Ω der Äquivalenz-Isomorphismen zu $|\Omega| = 2^{13} \cdot 3^3 = 221184$.

S sei wie in III. 4 b) festgelegt. Seine Inzidenzmatrix M lautet dann:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Der von den Inzidenzvektoren erzeugte Unterraum T hat die Dimension 9. Die Neunerebene N (wie in III. 4 b) sei das Nullsystem des Ordnungsraumes $O = \text{GF}(2)^{12}$ von S .

O zerfällt unter der Wirkung von Ψ in 8 Äquivalenzklassen:

$$\begin{aligned} \check{A}_1 &= (000\ 000\ 000\ 000) + T \\ \check{A}_2 &= (111\ 000\ 000\ 000) + T =: \underline{w}_2 + T \\ \check{A}_3 &= (000\ 111\ 000\ 000) + T =: \underline{w}_3 + T \\ \check{A}_4 &= (000\ 000\ 111\ 000) + T =: \underline{w}_4 + T \\ \check{A}_5 &= (000\ 000\ 000\ 111) + T =: \underline{w}_5 + T \\ \check{A}_6 &= (111\ 111\ 000\ 000) + T =: \underline{w}_6 + T \\ \check{A}_7 &= (111\ 000\ 111\ 000) + T =: \underline{w}_7 + T \\ \check{A}_8 &= (111\ 000\ 000\ 111) + T =: \underline{w}_8 + T \end{aligned}$$

Seien jetzt $\varphi_1, \dots, \varphi_7 \in K$ mit

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 021 \\ 001 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \begin{pmatrix} 100 \\ 210 \\ 202 \end{pmatrix}, \varphi_3 = \begin{pmatrix} 100 \\ 011 \\ 002 \end{pmatrix}, \varphi_4 = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \\ 110 \end{pmatrix} \\ \varphi_5 &= \begin{pmatrix} 100 \\ 011 \\ 012 \end{pmatrix}, \varphi_6 = \begin{pmatrix} 100 \\ 012 \\ 022 \end{pmatrix}, \varphi_7 = \begin{pmatrix} 100 \\ 002 \\ 010 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

φ_i ($i = 1, \dots, 7$) bildet die Vektoren von O folgendermaßen ab:

$$\varphi_i : \begin{array}{l} O \longrightarrow O \\ \underline{v} \longmapsto A_i \underline{v} + \underline{k}_i \end{array}$$

Dabei ist

$$A_1 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = \begin{array}{l} \{1,1\}, \{2,2\}, \{3,3\}, \{4,7\}, \\ \{5,9\}, \{6,8\}, \{7,4\}, \{8,6\}, \\ \{9,5\}, \{10,10\}, \{11,12\}, \{12,11\} \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_1 = (111 \ 000 \ 000 \ 000)$$

$$A_2 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = \begin{array}{l} \{1,3\}, \{2,2\}, \{3,1\}, \{4,6\}, \\ \{5,4\}, \{6,5\}, \{7,11\}, \{8,12\}, \\ \{9,10\}, \{10,7\}, \{11,8\}, \{12,9\} \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_2 = (000 \ 111 \ 000 \ 000)$$

$$A_3 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = \begin{array}{l} \{1,1\}, \{2,3\}, \{3,2\}, \{4,10\}, \\ \{5,11\}, \{6,12\}, \{7,7\}, \{8,8\}, \\ \{9,9\}, \{10,4\}, \{11,5\}, \{12,6\} \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_3 = (000 \ 000 \ 111 \ 000)$$

$$A_4 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = \begin{array}{l} \{1,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{4,2\}, \\ \{5,3\}, \{6,1\}, \{7,7\}, \{8,9\}, \\ \{9,8\}, \{10,12\}, \{11,10\}, \{12,11\} \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_4 = (000 \ 000 \ 000 \ 111)$$

$$A_5 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = \begin{array}{l} \{1,7\}, \{2,9\}, \{3,8\}, \{4,10\}, \\ \{5,12\}, \{6,11\}, \{7,1\}, \{8,2\}, \\ \{9,3\}, \{10,4\}, \{11,5\}, \{12,6\} \end{array} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_5 = (111 \ 111 \ 000 \ 000)$$

$$A_6 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = (1,10), (2,11), (3,12), (4,7), \\ & (5,9), (6,8), (7,4), (8,5), \\ & (9,6), (10,1), (11,3), (12,2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_6 = (111 \ 000 \ 111 \ 000)$$

$$A_7 = (a_{lm}) = \begin{cases} 1 & \text{für } (l,m) = (1,4), (2,6), (3,5), (4,1), \\ & (5,2), (6,3), (7,10), (8,11), \\ & (9,12), (10,7), (11,9), (12,8) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underline{k}_7 = (111 \ 000 \ 000 \ 111)$$

Für den Nullvektor $\underline{0} = (000 \ 000 \ 000 \ 000) \in O$
gilt dann:

$$\underline{0}^{\psi_i} = \underline{w}_{i+1} \quad (i = 1, \dots, 7)$$

Also hat O unter der Wirkung der Gruppe $\langle \psi, \psi_1 \dots \psi_7 \rangle \leq \Omega$
nur eine Bahn, d. h. es gibt nur eine Äquivalenz-
Isomorphieklasse und es gibt genau ein geordnetes
Steinersches Tripelsystem zu S . Dies ist die
Neunerebene N .

Abschließend zur Klassifizierung geordneter Steinerscher
Tripelsysteme zu einem vorgegebenen Steinerschen Tripel-
system soll jetzt noch untersucht werden, wie die Anzahl
dieser geordneten Steinerschen Tripelsysteme mit der
Ordnung des Steinerschen Tripelsystems wächst.

V. 11 Satz

S sei ein projektiver Raum über $GF(2)$ der Dimension k .

Für $k = 1$ gibt es genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem zu S , für $k = 2$ genau zwei geordnete Steinersche Tripelsysteme zu S , für $k = 3$ bereits mehr als 832, für $k = 4$ mehr als 2^{700} und für $k > 4$ nimmt die Anzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme weiter stark zu.

Beweis:

Für einen projektiven Raum S über $GF(2)$ der Dimension k gilt:

- i) Die Ordnung von S ist $n = 2^{k+1} - 1$.
- ii) Die projektive Dimension von S ist $dp = k$.
- iii) Die Kollineationsgruppe von S ist die $PGL(k+1, 2)$.
Sie hat die Ordnung:

$$\begin{aligned}
 |PGL(k+1, 2)| &= (2^{k+1} - 1)(2^{k+1} - 2) \dots (2^{k+1} - 2^k) \\
 &= 2^{\sum_{i=1}^k i} (2^{k+1} - 1)(2^k - 1) \dots (2 - 1) \\
 &= 2^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot (2^{k+1} - 1) \cdot (2^k - 1) \cdot \dots \cdot (2 - 1)
 \end{aligned}$$

Nach V. 9 beträgt die Mindestanzahl m der geordneten Steinerschen Tripelsysteme zu einem Steinerschen Tripelsystem mit Kollineationsgruppe K und Ordnung n :

$$m = |K|^{-1} \cdot 2^{\frac{n(n-7)}{6}} + dp + 1$$

Hier gilt also:

$$m = \frac{2^{\frac{1}{6}(2^{k+1}-1)(2^{k+1}-8) + k + 1}}{2^{\frac{k(k+1)}{2}} (2^{k+1}-1) (2^k - 1) \dots (2-1)}$$

Speziell ergibt sich

a) Für $k = 3$:

$$m = \frac{2^{\frac{1}{6}(2^8-9 \cdot 2^4-27+9+14)}}{15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2^{18}}{315} > 832$$

b) Für $k = 4$:

$$m = \frac{2^{\frac{1}{6}(2^{10}-9 \cdot 2^5-3 \cdot 16+12+14)}}{31 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2^{714}}{9765} = \frac{16384}{9765} \cdot 2^{700}$$

$$m > 2^{700}$$

c) Für $k > 4$:

$$m = \frac{2^{\frac{1}{6}(2^{2k+2}-9 \cdot 2^{k+1}-3k^2+3k+14)}}{(2^{k+1}-1)(2^k-1) \dots (2-1)}$$

$$= (m')^2 \frac{2^{\frac{1}{6}(2^{2k+1}+3(k+2)(k-3)+4)}}{2^{k+1}-1}$$

wobei m' die Mindestanzahl der geordneten Steinerschen Tripelsysteme zum projektiven Raum über $GF(2)$ der Dimension $k' = k-1$ ist. Man sieht sofort, daß m mit steigender Dimension k stark zunimmt.

d) Für $k = 1$ oder $k = 2$ wurde die Aussage des Satzes bereits gezeigt.

Auch für affine Räume über $GF(3)$ nimmt die Anzahl zugehöriger geordneter Steinerscher Tripelsysteme mit steigender Dimension schnell zu.

V. 12 Satz

S sei ein affiner Raum der Dimension k über $GF(3)$. Für $k = 1$ bzw. $k = 2$ gibt es genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem zu S , für $k = 3$ mehr als 2^{71} und für $k > 3$ nimmt die Anzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu S weiter stark zu.

Beweis:

Für einen affinen Raum S über $GF(3)$ der Dimension k gilt:

- i) Die Ordnung von S ist $n = 3^k$
- ii) Die projektive Dimension von S ist $dp = -1$
- iii) Die Kollineationsgruppe K von S hat die Ordnung:

$$\begin{aligned}
 |K| &= 3^k (3^k - 1) (3^k - 3) \dots (3^k - 3^{k-1}) \\
 &\quad \sum_{i=1}^k i \\
 &= 3^{i=1} (3^k - 1) (3^{k-1} - 1) \dots (3 - 1) \\
 &\quad \frac{k(k+1)}{2} \cdot (3^k - 1) \cdot (3^{k-1} - 1) \dots (3 - 1) \quad .
 \end{aligned}$$

Nach V. 9 beträgt die Mindestanzahl m der geordneten Steinerschen Tripelsysteme zu einem Steinerschen Tripelsystem der Ordnung n mit Kollineationsgruppe K :

$$m = |K|^{-1} \cdot 2^{\frac{n(n-7)}{6} + dp + 1} .$$

Hier gilt also:

$$m = \frac{\frac{1}{2} \cdot 3^{k-1} (3^k - 7)}{3^{\frac{k(k+1)}{2}} (3^k - 1) (3^{k-1} - 1) \dots (3 - 1)}$$

Speziell ergibt sich:

a) Für $k = 3$:

$$m = \frac{2^{\frac{3(3+1)}{2}} (27-7)}{3^6 \cdot 26 \cdot 8 \cdot 2} = \frac{2^{85}}{9477} = \frac{16 \cdot 384}{9477} \cdot 2^{71} > 2^{71}$$

b) Für $k \geq 4$:

$$m = \frac{\frac{1}{2} (3^k - 7) \cdot 3^{k-1}}{3^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot (3^k - 1) \cdot \dots \cdot (3 - 1)} =$$

$$= m' \cdot \frac{2^7 \cdot 3^{k-1} \cdot (3^{k-1} - 1)}{3^k (3^k - 1)}$$

wobei m' die Mindestanzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme eines affinen Raums über $GF(3)$ der Dimension $k' = k-1$ angibt. Man sieht, daß m mit steigender Dimension k stark zunimmt.

c) Für $k = 1$ bzw. $k = 2$ wurde die Aussage des Satzes bereits bewiesen.

Um für allgemeine Steinersche Tripelsysteme die Mindestanzahl zugehöriger geordneter Steinerscher Tripelsysteme abschätzen zu können, benötigt man zunächst eine Aussage über die Ordnung seiner Kollineationsgruppen.

V. 13 Hilfssatz

Sei S ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n mit Kollineationsgruppe K . Weiter sei $x_n \in \mathbb{N}$ mit $2^{x_n} - 1 \leq n \leq 2^{x_n+1} - 1$, P_x ein projektiver Raum über $GF(2)$ der Dimension x_n mit Kollineationsgruppe $PGL(x_n + 1, 2)$.

Dann ist $|K| \leq |PGL(x_n + 1, 2)|$

Beweis:

A sei ein Punkt von S , $P =: S_0 \subset S_1 \subset S_2 \dots \subset S_k := S$ eine Fahne von Untersystemen von S , so daß für alle Untersysteme S' von S mit $S_i \subset S' \subset S_{i+1}$ ($i = 0, 1, \dots, k-1$) gilt: $S' = S_i \vee S' = S_{i+1}$. Dann ist $|K| \leq |S| \cdot (|S| - |S_0|) \cdot (|S| - |S_1|) \cdots (|S| - |S_{k-1}|)$. Da S_i ein echtes Untersystem von S_{i+1} ist und $|S_0| = 1$ folgt:

$$|S_{i+1}| \geq 2|S_i| + 1, \text{ und damit}$$

$$|S_i| \geq 2^{i+1} - 1.$$

Also ist

$$|K| \leq |S| \cdot (|S| - 1) \cdot (|S| - 3) \cdots (|S| - 2^{i+1} + 1) \cdots (|S| - 2^{k+1} + 1)$$

Nach Definition von x_n ist

$$|P_{x_n}| = 2^{x_n+1} - 1 \geq n = |S|.$$

Es folgt weiter:

$$\begin{aligned} |K| &\leq |P_{x_n}| \cdot (|P_{x_n}| - 1) \cdots (|P_{x_n}| - 2^{i+1} + 1) \cdots (|P_{x_n}| - 2^{k+1} + 1) = \\ &= (2^{x_n+1} - 1) \cdot (2^{x_n+1} - 2) \cdots (2^{x_n+1} - 2^{i+1}) \cdots (2^{x_n+1} - 2^k) \end{aligned}$$

$$\leq |PGL(x_n + 1, 2)|$$

Jetzt kann man die Mindestanzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu einem beliebigen Steinerschen Tripelsystem abschätzen.

V. 14 Satz

S sei ein Steinersches Tripelsystem der Ordnung n. Für $n = 3$ und $n = 9$ gibt es genau ein geordnetes Steinersches Tripelsystem zu S, für $n = 7$ genau zwei, für $n = 13$ mindestens 6, für $n = 15$ mehr als 32, für $n = 19$ mehr als 16 384, für $n = 21$ mehr als 33 554 432 und für $n > 21$ nimmt diese Mindestanzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu S weiter rapide zu.

Beweis:

- a) Für $n = 3, 7, 9$ gibt es genau ein Steinersches Tripelsystem S mit Ordnung n. Diese wurden bereits behandelt.
- b) Für $n = 13$ hat S keine echten Untersysteme, deren Ordnung größer als drei ist, d. h. nach dem Beweis von V. 13 ist die Ordnung der Kollineationsgruppe K von S:

$|K| \leq 13 \cdot 12 \cdot 10$ und die projektive Dimension von S ist $dp = -1$

Nach V. 9 ist die Mindestanzahl m geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu S:

$$m = \frac{\frac{n(n-7)}{6} + dp + 1}{|K|}$$

Hier gilt also:

$$m \geq \frac{2 \cdot 13}{13 \cdot 12 \cdot 10} > 5,25$$

D. h. es gibt mindestens 6 geordnete Steinersche Tripelsysteme zu S.

- c) Für $n > 13$ sei x_n wie in V. 13 definiert. Die projektive Dimension eines Steinerschen Tripelsystems ist immer $dp \geq -1$.
Nach V. 9 ist wieder die Mindestanzahl geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu S:

$$m = \frac{\frac{n(n-7)}{6} + dp + 1}{|K|}$$

Hier gilt somit:

$$m \geq \frac{\frac{n(n-7)}{6}}{|PGL(x_n+1, 2)|} = \frac{\frac{n(n-7)}{6}}{\frac{x_n(x_n+1)}{2^{\frac{x_n+1}{2}} (2^{x_n+1}-1)(2^{x_n}-1)\dots(2-1)}}$$

Bezeichne jetzt mit r_n :

$$r_n := \frac{\frac{n(n-7)}{6}}{\frac{x_n(x_n+1)}{2^{\frac{x_n+1}{2}} (2^{x_n+1}-1)(2^{x_n}-1) \dots (2-1)}}$$

Dann gibt es mehr als r_n geordnete Steinersche Tripelsysteme zu S.

- i) Für $n = 15$ ist $x_n = 3$ und

$$r_n = \frac{\frac{15 \cdot 8}{6}}{\frac{3 \cdot 4}{2^{\frac{3+1}{2}}} \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2^{14}}{3^{15}} = \frac{512}{3^{15}} \cdot 2^5 > 2^5 = 32$$

- ii) Für $n = 19$ ist $x_n = 4$ und

$$r_n = \frac{\frac{19 \cdot 12}{6}}{\frac{4 \cdot 5}{2^{\frac{4+1}{2}}} \cdot 31 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2^{28}}{9765} = \frac{16384}{9765} \cdot 2^{14} > 2^{14} = 16384$$

iii) Für $n = 21$ ist $x_n = 4$ und

$$r_n = \frac{\frac{21 \cdot 14}{6}}{\frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 31 \cdot 15 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{2^{39}}{9765} > 2^{25} = 33\,554\,432$$

iv) Für $n > 21$ seien bereits für $n' = n-6$ $x_{n'}$ und $r_{n'}$ bestimmt. Dann ist $x_n \leq x_{n'+1}$ und

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{\frac{n(n-7)}{6}}{\frac{x_n(x_{n'+1})}{2} \cdot \frac{x_{n'+1}}{(2^{x_{n'+1}}-1)} \cdot \frac{x_n}{(2^{x_n}-1)} \cdots (2-1)} \\ &\geq \frac{\frac{(n'+6)(n'-1)}{6}}{\frac{(x_{n'+1}+1)(x_{n'+1}+2)}{2} \cdot \frac{2^{x_{n'+1}+2}}{(2^{x_{n'+1}+2}-1)} \cdot \frac{2^{x_{n'+1}+1}}{(2^{x_{n'+1}+1}-1)} \cdots (2-1)} \\ &= r_{n'} \cdot \frac{2^{2n'-1}}{2^{x_{n'+1}+1} \cdot \frac{x_{n'+1}+2}{(2^{x_{n'+1}+2}-1)}} > r_{n'} \cdot \frac{2^{2n'-4}}{2^{2x_{n'}}} \\ &> r_{n'} \cdot \frac{2^{2n'-4}}{(n'+1)^2} \\ &>> r_{n'} \end{aligned}$$

D. h. die Anzahl m geordneter Steinerscher Tripelsysteme zu S nimmt ebenfalls schnell zu, da $m > r_n$.

Literaturverzeichnis

- [1] Marshall Hall, jr.: "Combinatorial Theory",
Blaisdell Publishing Company,
Waltham, 1967
- [2] M. Reiß: "Über eine Steinersche combina-
torische Aufgabe, welche im 45sten
Bande dieses Journals, S. 181, ge-
stellt worden ist",
Journal reine und angewandte Mathe-
matik, 56 (1859), S. 326 - 344
- [3] Rev. Thomas Kirkman: "On a problem in combinations",
Cambridge and Dublin Mathematic
Journal, 2 (1847) S. 191 - 204
- [4] Jean Doyen, Xavier
Hubaut and Monique
Vandensavel: "Ranks of Incidence Matrices of
Steiner Triple Systems",
Math. Z. 163, 251-259 (1978)
- [5] R. H. Bruck: "What ist a loop?",
Studies in Modern Algebra (A.A. Albert
Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
(1963) S. 59 - 99
- [6] Walter Fleischmann: "Ausnahmegruppen und Oktavengeome-
trie",
Zulassungsarbeit
Erlangen 1977
- [7] E. Becker: "Über eine Klasse flexibler quadra-
tischer Divisionsalgebren",
Journal reine und angewandte Mathe-
matik 256 (1972), S. 25 - 57

- [8] Richard D. Schafer: "An Introduction to Nonassociative Algebras",
Academic Press, New York and London, 1966
- [9] T. A. Springer: "Jordan Algebras and Algebraic Groups",
Springer-Verlag, Berlin 1973
- [10] H. Braun und M. Koecher: "Jordan-Algebren",
Springer-Verlag, Berlin 1966
- [11] J. Š. O. Aliev: "Symmetric algebras and Steiner systems",
Soviet Math. Dokl. 8 (1967),
S. 651 - 653
- [12] J. Š. O. Aliev: "Combinatorial designs and algebras",
Sib. Math. Journal 13 (1972), S. 341
- 348
- [13] J. P. Neporožnev und
A. Ja. Petrenjuk: "Konstruktivnoje perečislenije
sistem grupp par i o glav lennyj
sistemy trojek Štejnera",
Kombinatornyj Analiz 3 (1974) S. 28
- 42
- [14] N. K. Pukharev: "Nekotoryje svojstva regul'arnych
konečnych ploskostej Lobačevskogo",
Učen.Zap. Permsk. Gos.Univ. Mat. 103
(1963), S. 228 - 230
- [15] E. F. Assmus Jr.,
H. F. Mattson Jr. und
M. Guza: "Self-orthogonal Steiner Systems
and projektive planes",
Math. Z. 138 (1974) S.89 - 96

- [16] F. Buekenhout: "A characterization of the affine spaces of order two as 3-designs",
Math. Z. 118 (1970) S. 83 - 85
- [17] F. Buekenhout: "On the orbits of collineation groups",
Math. Z. 119 (1971) S. 273 - 275
- [18] P. C. Clapham: "Steiner triple systems with block-transitive automorphism groups",
Discrete Math. 14 (1976) S. 121 - 131
- [19] J. W. DiPaola: "When ist a totally symmetric loop a Group?",
Amer. Math. Monthly 76 (1969) S. 59 - 61
- [20] S. H. I. Hung und N. S. Mendelsohn: "Directed triple systems",
J. Combinatorial Theory (A) 14 (1973) S. 310 - 318
- [21] E. C. Johnsen und T. Storer: "Combinatorial structures in loops, IV. Steiner triple systems in neofields",
Math. Z. 138 (1974) S. 1 - 14
- [22] H.Lüneburg: "Steinersche Tripelsysteme mit fahnentransitiver Kollineationsgruppe"
Math. Ann. 149 (1963) S. 261 - 270
- [23] R. Noda: "Steiner Systems which admit block transitive automorphism groups of small rank",
Math. Z. 125 (1972) S. 113 - 121

- [24] J. Doyen und A. Rosa: "An updated Bibliography and Survey of Steiner systems",
Ann. Discrete Math. 7 (1980) S. 317
- 349
- [25] H. Freudenthal: "Oktaven, Ausnahmegruppen und Oktaven-
geometrie",
Script des Math. Inst. der
Rijksuniversiteit te Utrecht (1951).

Lebenslauf

Name : Sigrid Elisabeth Walter

Adresse: Wichernstr. 14, 8520 Erlangen

Geboren: 8.9.1955 in Coburg

Eltern : Ursula Walter geb. Henke und Oskar Walter

Schulen:

1961 - 65 Volksschule in Hofsteinach/Coburg

1965 - 72 Arnold-Gymnasium in Neustadt/Coburg

1972 - 74 Gymnasium Alexandrinum in Coburg

1974 Abitur

Studium:

WS 74/75 - WS 80/81 Mathematik und Physik LAG an der
Universität Erlangen-Nürnberg

SS 81 - SS 83 Mathematik an der
Universität Erlangen-Nürnberg

Herbst 1980 Staatsprüfung LAG

Beschäftigungen:

Mai 81 - August 83 wiss. Hilfskraft bzw. Angestellte
am Mathematischen Institut bzw.
am FB Erziehungswissenschaften der
Universität Erlangen-Nürnberg

Erlangen, den 1.9.83

Sigrid Walter

